Electrodynamique I

Cours de 1ère année

Martin Pohl

Université de Genève

Été 2004

Assistants: Carlos J. Bolech, Evelyne Delmeire, Samuel Leach

Programme préliminaire

	Introduction	
8 mars	Présentation du cours, critères certificat	
	Concepts de champ et de potentiel	
	Electrostatique dans le vide	
	Loi de Coulomb, champ électrique, distributions de charges	2.1
15 mars	Divergence et rotationel du champ électrostatique	2.2
	Le potentiel électrique	2.3
22 mars	Travail et énergie électrostatique	2.4
	Conducteurs	2.5
	Astuces de calcul	
29 mars	L'équation de Laplace	3.1
	Méthode d'image	3.2
5 avril	Séparation de variables	3.3
	Développement multipolaire	3.4

Programme préliminaire

	Champs électriques dans les milieux pondérés	
19 avril	Polarisation	4.1
	Champ d'un objet polarisé	4.2
26 avril	Le déplacement	4.3
	Diélectriques linéaires	4.4
	Magnétostatique dans le vide	
3 mai	Loi de Lorentz	5.1
	Loi de Biot-Savart	5.2
10 mai	Divergence et rotationel du champ magnétique	5.3
	Potentiel vectoriel magnétique	5.4
	Electrodynamique	
17 mai	Force électromotrice	7.1
	Induction	7.2
24 mai	Equations de Maxwell dans le vide	7.3
	Champs magnétiques dans les milieux pondérés	
7 juin	Magnétisation	6.1, 6.2
14 juin	Le champ $\boldsymbol{H}$, milieux linéaires	6.3, 6.4

Le personel du cours

Cours:

– Martin Pohl, physique expérimentale des particules

Exercices:

– Carlos J. Bolech, physique expérimentale du solide

– Evelyne Delmeire, physique expérimentale des particules

– Samuel Leach, physique théorique

Expériences de démonstration:

– Charly Burgisser, préparateur

Littérature recommandée

Le cours s'appuiera sur:

– **David J. Griffith, Introduction to Electrodynamics, Third Edition, Prentice Hall 1999**

Autres livres excellents:

– **Richard P. Feynman, Robert B Leighton, Matthew Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. II, Addison Wesley**

– **Edward M. Purcell, Electricité et Magnétisme, Cours de Berkeley, Vol. 2, Armand Colin**

Pour retrouver les transparents du cours:

– voir `http://pohl.home.cern.ch/pohl/`

Attention: les transparents sont mis à jour à fur et à mesure, ce n'est pas une bonne idée d'imprimer tout au début.

Les critères d'évaluation

Contrôle continu:

– Une série d'exercices chaque semaine, $\simeq 4$ exercices
– Introduit et commenté par les assistants
– Solution par écrit, corrigé par les assistants
– Minimum pour le certificat: solution correcte de 60% des exercices

Examen écrit:

– Correspond à peu près à une série d'exercices
– Sans matériel d'appui
– Corrigé et noté par nos soins

Examen oral:

– Questions tirées au hasard
– Sans matériel d'appui
– Démonstration au tableau

Evaluation du cours par les étudiantes et étudiants

Le rôle de l’électromagnétisme

Hypothèses sur l’Univers à l’échelle microscopique:

- Vide: l’espace-temps, peuplé par la matière et les forces.
- Matière: nombre limité de catégories de particules élémentaires, identifiées par leur masse unique et leurs propriétés vis-à-vis des forces
- Particule dite élémentaire: sans structure intérieure, correspond à un point dans l’espace-temps
- Forces: limitées en nombre, agissent entre les constituants de la matière. Cas idéal: manifestations d’une seule force universelle.
- Forces et matière: évoluent dans le vide, l’espace-temps à quatre dimensions.
- L’homme: fait partie de ce système dynamique, mais prétend pouvoir comprendre son fonctionnement, grâce à la méthode de l’expérience scientifique et de sa description mathématique.

Hypothèses évidemment contestables, programme propose de comprendre tout l’Univers par ses propriétés microscopiques.

Le rôle de l'électromagnétisme

Interactions fondamentales:

- Interactions fortes: force nucléaire, la plus forte interaction connue.
- Electromagnétisme: force entre particules (électriquement) chargées; fondement de chimie et biologie; lumière, électronique, matériaux.
- Interactions faibles: faibles à grande distance, étroitement lié à l'électromagnétisme; radioactivité, désintégration.
- Gravitation: force entre corps massives; interaction la plus faible.

Electrodynamique classique:

- Interaction entre charges électriques, sous forme de *particules chargées*
- Larges dimensions des systèmes, comparé à la taille d'un atome; à courtes distances: théorie quantique
- Evoluant à basse vitesse, comparé à la vitesse de la lumière
- Mais théorie classique s'avère en accord avec la rélativité; rélativité découverte en considérant les interactions des charges en mouvement:
  A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. d. Phys. **17** (1905)

Force, champ et potentiel

Mécanique Newtonienne prédit l'évolution d'une particule, sous l'influence d'une force $\vec{F}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} t = t_0 \ &: \ \vec{x}_0, \vec{v}_0 \\ t \ &: \ m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \end{aligned}$$

– Evolution décrite par une équation différentielle

– Double intégration $\longrightarrow$ trajectoire $\vec{x}(t)$

– Force agit d'une manière locale

– Equation de mouvement linéaire en $\vec{F} \longrightarrow$ principe de superposition $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$

– Systèmes conservatifs: forces découlent d'un potentiel $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$

Interaction intervient uniquement entre particules qui portent la charge nécessaire.

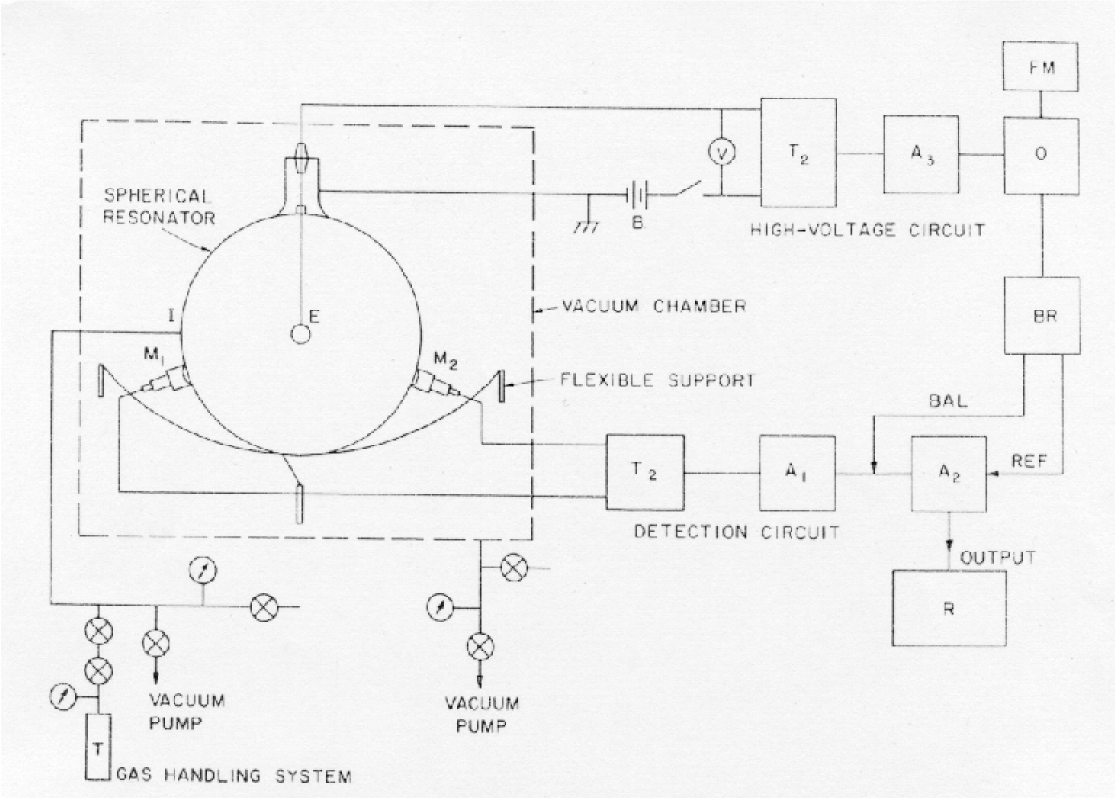
Charge électrique

Electromagnétisme: charge électrique. Caractéristiques:

- Charge a signe et magnitude.
- Force entre particules:
  - repulsive entre $\oplus$ et $\oplus$, $\ominus$ et $\ominus$
  - attractive entre $\ominus$ et $\oplus$, $\oplus$ et $\ominus$
- Charge totale d'un système isolé est conservée.
- Création de particules chargées en paires particule anti-particule. Charges égales en magnitude, opposées en signe: $|q_e + q_{\bar{e}}|/q_e < 4 \times 10^{-8}$. Mesure implique plusieurs expériences, dont les resultats sont combinés; présenté plus tard.
- Atomes sont neutres, $|q_e + q_p|/q_e < 1.0 \times 10^{-21}$, voir Dylla & King.
- Particules sans masse ne sont pas chargées (par ex. photon), mais massives sans charge existent (par ex. neutron).
- Particules élémentaires, même massives, sont ponctuelles ($< 10^{-13}$cm) en ce qui concerne les distances considérées dans ce cours.
- La charge est quantifiée en unités de $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ Coulomb, à des distances $> 10^{-13}$cm. En dessous: quarks, $q_u = \frac{2}{3} q_e$, $q_d = -\frac{1}{3} q_e$

Expérience: neutralité des atomes

Expérience électro-acoustique ingénieuse:



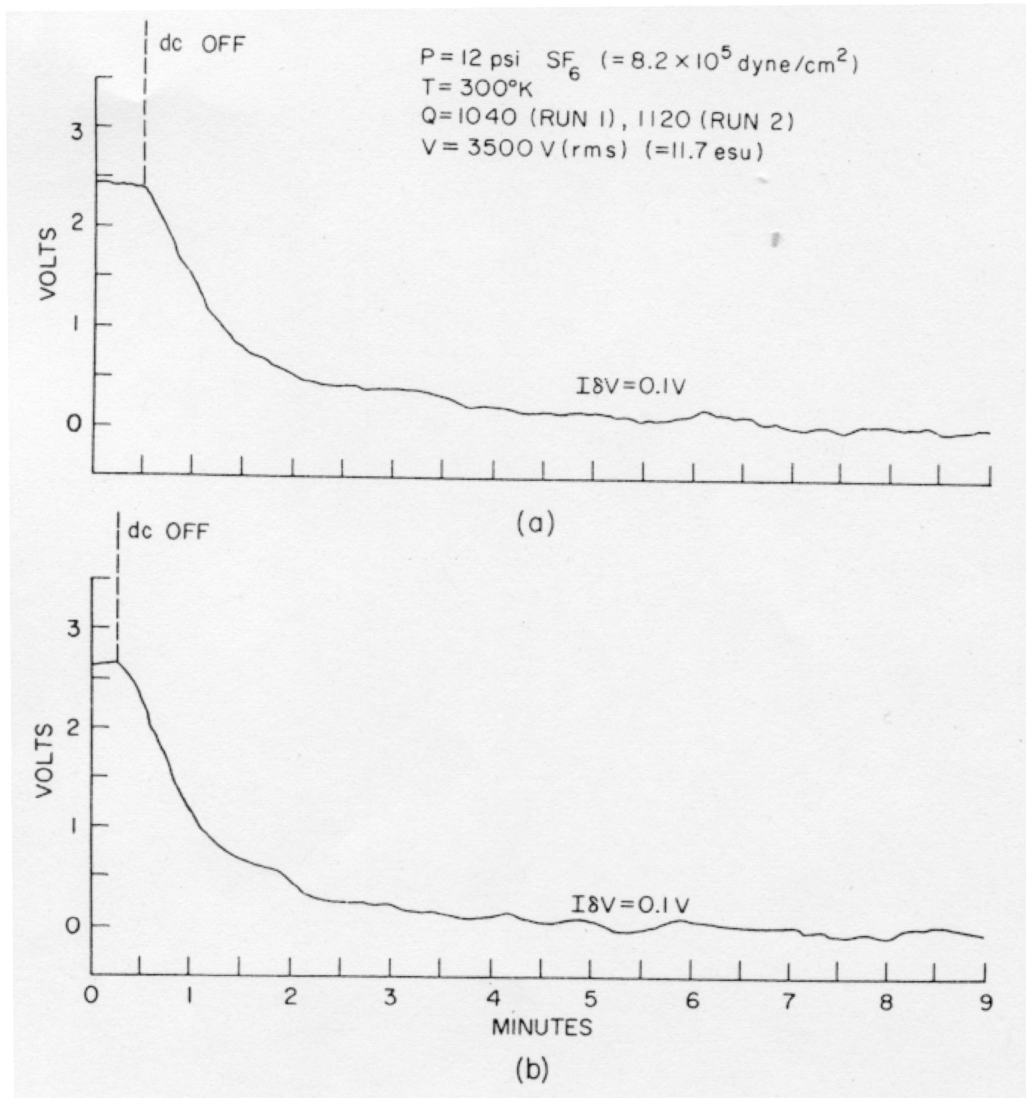
– Gaz de SF_6 inclus dans une sphère
– Champ électrique périodique, avec fréquence de résonance du gaz
– Microphones pour “écouter” si le gaz résonne
– Gaz neutre ne réagit pas

– Absense du signal $\longrightarrow$ limite supérieure pour la charge de l’atome
– Grande précision à cause de l’effet amplificateur de la résonance

H.F. Dylla and J.G. King (MIT), *Neutrality of Molecules by a New Method*, Physical Review **A 7** (1973) p. 1224

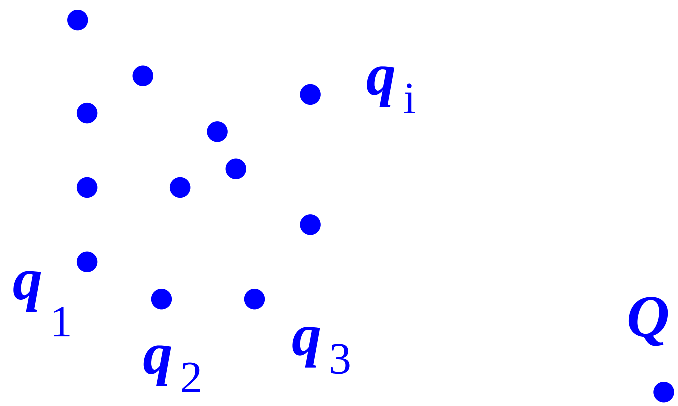
Expérience: neutralité des atomes

– Au début on induit un signal en polarisant des molécules
– Après avoir supprimé la tension polarisante, le signal disparait exponentiellement
– A la fin seul un signal compatible avec le bruit ambiant persiste
– Charge du molécule compatible avec zero, limite supérieure donnée par niveau de bruit



H.F. Dylla and J.G. King (MIT), *Neutrality of Molecules by a New Method*, Physical Review **A 7** (1973) p. 1224

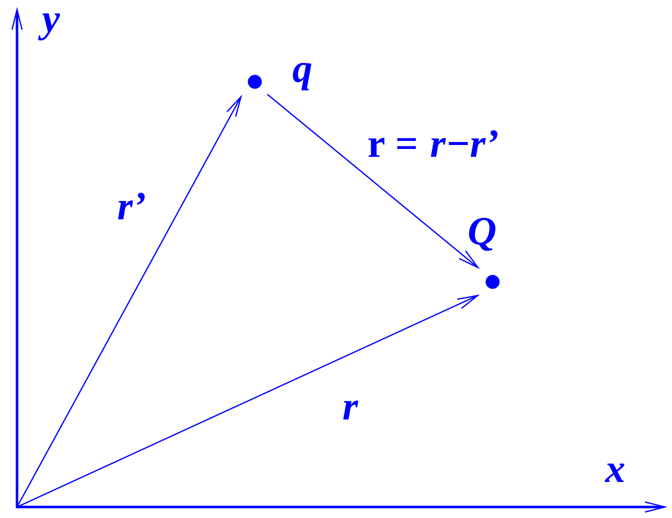
Champ électrique



Electrodynamique:

- Charges des sources $q_1, q_2, q_3, \ldots q_i$ créent champ électromagnétique dans tout l'espace, (ou potentiel électromagnétique équivalent)
- Champ exerce force sur une charge de test Q
- Champ dépend des positions, vitesses et accélérations des sources
- Théorie des champs quantiques: champ (ou plutôt potentiel) est créé en émettant des photons virtuels
- Information électromagnétique voyage avec la vitesse de la lumière, la création du champ n'est pas instantanée

Champ électrostatique



– Simplification considérable: charges des sources stationaires, électrostatique

– Attention: charge de test peut être en mouvement!

– Expérience: loi de Coulomb

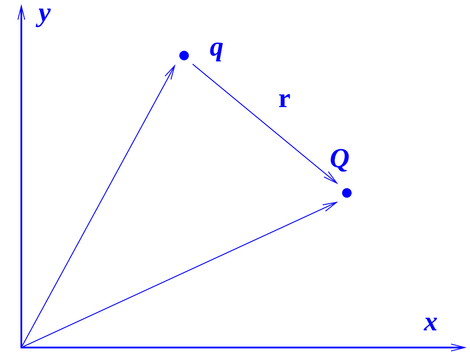
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{(\vec{r}-\vec{r}')^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{\mathrm{r}^2}\,\hat{\vec{\mathrm{r}}} \quad \text{avec} \quad \vec{\mathrm{r}} = \vec{r}-\vec{r}' \ ; \ \hat{\vec{\mathrm{r}}} = \vec{\mathrm{r}}/|\vec{\mathrm{r}}|$$

Loi de Coulomb

– Expérience: loi de Coulomb

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{\mathbf{r}^2}\,\hat{\vec{\mathbf{r}}}$$



– Interaction, symétrie entre $q \leftrightarrow Q$

– Proportionelle à la charge de source q et à la charge de test Q

– Superposition: ajoutons une deuxième charge q' au même endroit:

$$\vec{F}(q+q') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q+q')Q}{\mathbf{r}^2}\,\hat{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{F}(q) + \vec{F}(q')$$

– Inversement proportionelle au carré de la distance Démo 160

– Pointe de q vers Q si $qQ > 0$, de Q vers q autrement, le long du vecteur unitaire $\hat{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{r}}/|\vec{\mathbf{r}}|$

– Constante ϵ_0, constante diélectrique du vide, en système SI:

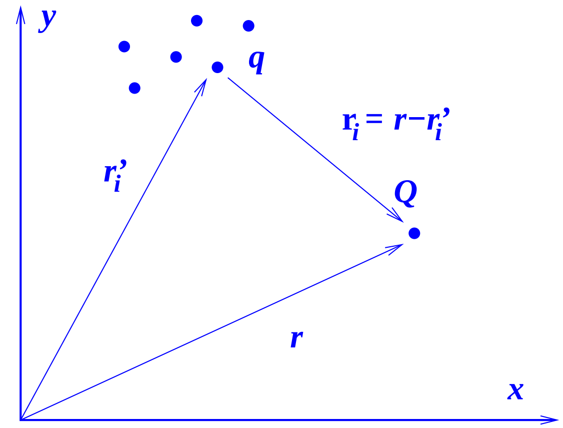
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}$$

Champ électrique

Plusieurs charges:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 Q}{\mathrm{r}_1^2}\hat{\vec{\mathrm{r}}}_1 + \frac{q_2 Q}{\mathrm{r}_2^2}\hat{\vec{\mathrm{r}}}_2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1\hat{\vec{\mathrm{r}}}_1}{\mathrm{r}_1^2} + \frac{q_2\hat{\vec{\mathrm{r}}}_2}{\mathrm{r}_2^2} + \cdots\right)$$



Champ électrique $\vec{E}$ des charges sources q_i:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\hat{\vec{\mathrm{r}}}_i}{\mathrm{r}_i^2}$$

Concept du champ permet de discuter l'action des charges sources sans référence à la charge test Q, seul la position intervient.

Champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ est propriété de l'espace $\vec{r}$.

Discutons: $\vec{E}$ est-il réel ou astuce de calcul?

Distributions de charge

Petites distances entre charges de source, $|\vec{r}'_i - \vec{r}'_j| \ll |\vec{\mathrm{r}}|$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\mathrm{r}^2}\, \hat{\vec{\mathrm{r}}}\, dq$$

– Ligne $\mathcal{P}$, charge par unité de longeur λ: $dq = \lambda dl'$, avec élément dl'

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{P}} \frac{\lambda(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\, \hat{\vec{\mathrm{r}}}\, dl'$$

– Surface $\mathcal{S}$, charge par unité de surface σ: $dq = \sigma da'$ avec élément da'

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\, \hat{\vec{\mathrm{r}}}\, da'$$

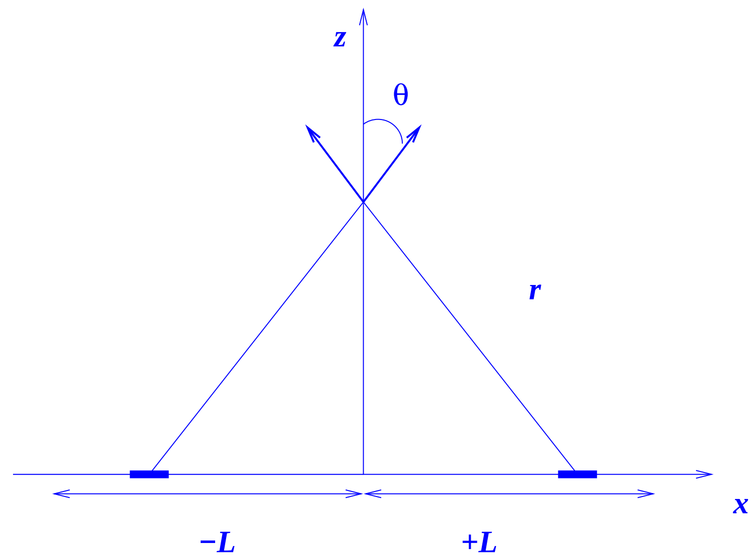
– Volume $\mathcal{V}$, charge par unité de volume ρ: $dq = \rho d\tau'$ avec élément $d\tau'$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\, \hat{\vec{\mathrm{r}}}\, d\tau'$$

Attention: $\vec{\mathrm{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$ est un vecteur qui pointe de $\vec{r}'$, position des éléments dl', da' et $d\tau'$, vers $\vec{r}$, position ou le champ est déterminé. Il n'est pas constant!

Champ d'un fil droit chargé

Exemple:
Champ au dessus de l'axe de symétrie d'un fil droit de longeur $2L$, chargé homogènement, densité de charge λ.



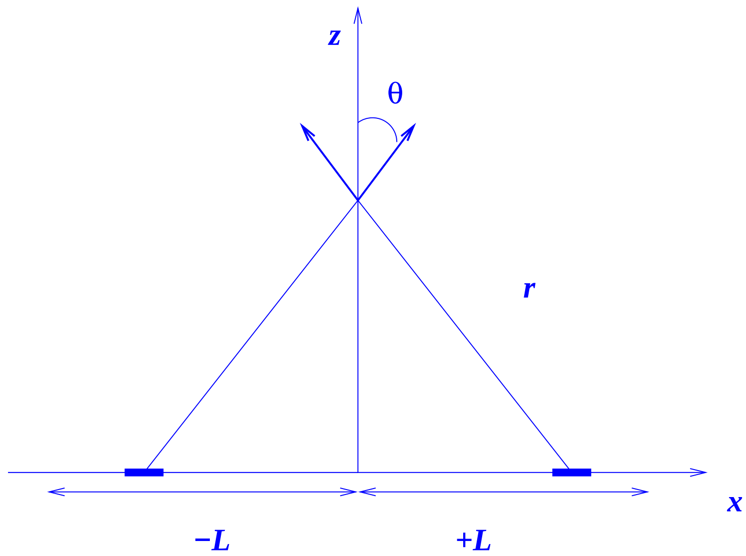
Composantes horizontales de $\vec{E}$ se compensent (sur l'axe z!) par symétrie, $\vec{E} = (0,0,E_z)$. Composantes verticales s'additionnent:

$$\begin{aligned}
E_z &= 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \left(\frac{\lambda\, dx}{\mathrm{r}^2}\right)\cos\theta \ ; \ \cos\theta = \frac{z}{\mathrm{r}} \ ; \ \mathrm{r} = \sqrt{x^2+z^2} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{2\lambda z}{(x^2+z^2)^{3/2}}\, dx \\
&= \frac{2\lambda z}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x}{z^2\sqrt{x^2+z^2}}\right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda L}{z\sqrt{L^2+z^2}}
\end{aligned}$$

Champ d'un fil droit chargé

Rappel:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z\sqrt{L^2 + z^2}}$$



A grandes distances $z \gg L$:

$$E \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda L}{z^2}$$

Le fil chargé a le même champ qu'une charge ponctuelle $q = 2\lambda L$.

Pour un fil très long, par contre, $L \longrightarrow \infty$:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{z}$$

valable pour tout x.

Lignes de champ électrique

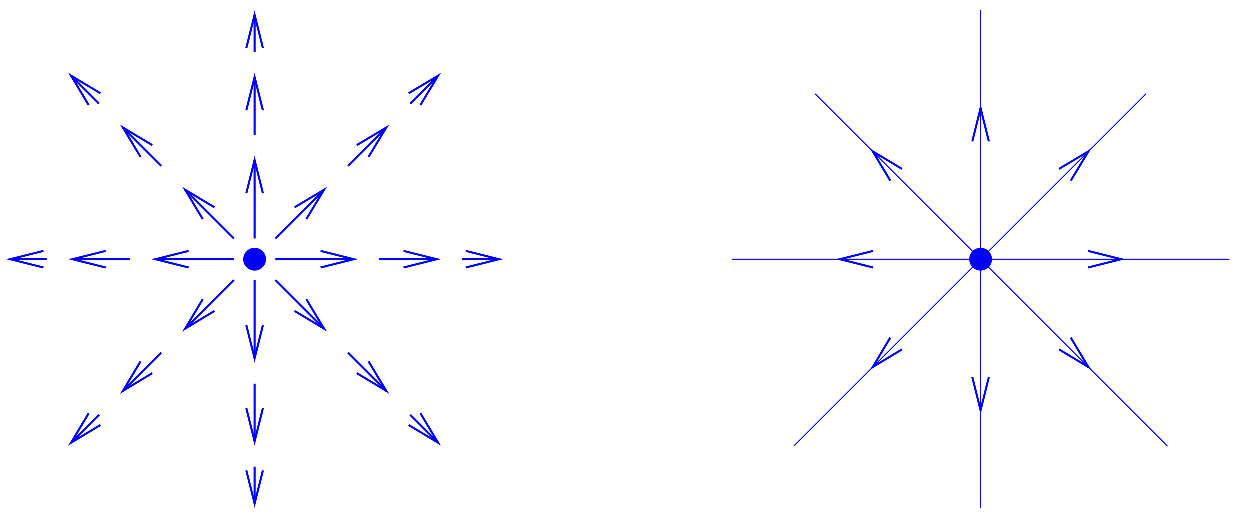
Production du champ par distribution $\rho(\vec{r}')$ de charges sources:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\, \hat{\vec{\mathrm{r}}}\, d\tau'$$

Effet du champ sur une charge test Q:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

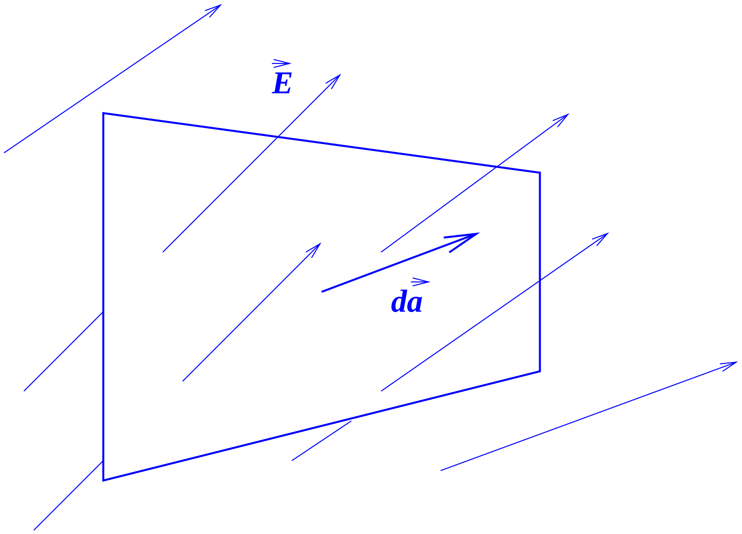
Visualisation intuitive du champ $\vec{E}$: lignes de champ, originaires de $\oplus$, terminent sur $\ominus$ (ou à l'infini)



Lignes par unité de surface indiquent $|\vec{E}|$, tangente indique direction $\vec{E}/E$.

Démo 161/162

Flux électrique



Quantitativement: flux électrique

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\, d\vec{a}$$

Intuitivement: $\vec{E} \cdot d\vec{a}$ proportionel au nombre de lignes passant par une surface infinitésimale, normale à $\vec{E}$.

Surface close:

- Charges intérieures: chaque ligne traverse la surface, ou se termine sur une charge opposée à l'intérieur.
- Charges extérieures: ligne passe surface deux fois, entrant et sortant.

Le flux par une surface close mesure la charge totale incluse, loi de Gauss.

Loi de Gauss, forme intégrale

Une seule charge incluse à l'origine, dans une sphère de rayon r, décrite par coordonnées sphériques, angle polaire θ, azimuth ϕ:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}\right) \left(r^2\, d\cos\theta\, d\phi\, \hat{\vec{r}}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Rayon n'intervient pas: surface augmente comme r^2, champ diminue comme $1/r^2$. Résultat indépendant de la forme de la surface.

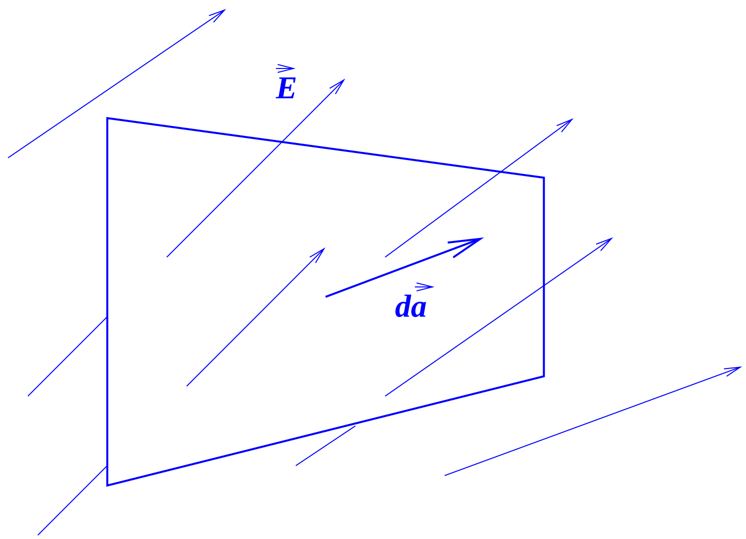
Plusieurs charges:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum \vec{E}_i \\ \oint \vec{E}\, d\vec{a} &= \sum \oint \vec{E}_i\, d\vec{a} = \sum \left(\frac{q_i}{\epsilon_0}\right) \end{aligned}$$

Pour toute surface close, forme intégrale de la loi de Gauss:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0}$$

Rappel: Flux électrique



Quantitativement: flux électrique

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\, d\vec{a}$$

Intuitivement: $\vec{E} \cdot d\vec{a}$ proportionel au nombre de lignes passant par une surface infinitésimale, normale à $\vec{E}$.

Surface close:

- Charges intérieures: chaque ligne traverse la surface, ou se termine sur une charge opposée à l'intérieur.
- Charges extérieures: ligne passe surface deux fois, entrant et sortant.

Le flux par une surface close mesure la charge totale incluse, loi de Gauss.

Rappel: Loi de Gauss, forme intégrale

Une seule charge incluse à l'origine, dans une sphère de rayon r, décrite par coordonnées sphériques, angle polaire θ, azimuth ϕ:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}\right) \left(r^2\, d\cos\theta\, d\phi\, \hat{\vec{r}}\right) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Rayon n'intervient pas: surface augmente comme r^2, champ diminue comme $1/r^2$. Résultat indépendant de la forme de la surface.

Plusieurs charges:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum \vec{E}_i \\ \oint \vec{E}\, d\vec{a} &= \sum \oint \vec{E}_i\, d\vec{a} = \sum \left(\frac{q_i}{\epsilon_0}\right) \end{aligned}$$

Pour toute surface close, forme intégrale de la loi de Gauss:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0}$$

Loi de Gauss, forme différentielle

Théorème de la divergence:

$$\underbrace{\oint \vec{E}\, d\vec{a}}_{\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\, d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)\, d\tau} = \underbrace{\frac{Q_{inc}}{\epsilon_0}}_{Q_{inc} = \int_{\mathcal{V}} \rho\, d\tau}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla}\vec{E}\right)\, d\tau = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right)\, d\tau$$

Forme différentielle de la loi de Gauss:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Divergence du champ électrique

Vérification de la loi de Gauss:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\,\hat{\vec{\mathrm{r}}}\,d\tau'$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \vec{\nabla}\left(\frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}\right)\rho(\vec{r}')\;d\tau'$$

Divergence de $\hat{\vec{\mathrm{r}}}/\mathrm{r}^2$?

Champ vectoriel $\vec{v}$ en coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla}\vec{v} \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(v_\phi\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\hat{\vec{\mathrm{r}}}/\mathrm{r}^2\right) \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = 0 \quad \text{partout sauf à } r = 0 \quad (\vec{v}\to\infty)$$

Intégrale sur une sphère de rayon R:

$$\oint\left(\hat{\vec{\mathrm{r}}}/\mathrm{r}^2\right)\;d\vec{a} \;=\; \int\left(\frac{1}{R^2}\hat{\vec{\mathrm{r}}}\right)\left(R^2\sin\theta\;d\theta\;d\phi\;\hat{\vec{\mathrm{r}}}\right) = \left(\int_0^\pi \sin\theta\;d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\;d\phi\right) = 4\pi$$

Divergence du champ électrique cont.

La fonction δ a les propriétés recherchées:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\hat{\vec{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\vec{r})$$

Divergence de $\vec{E}$ reproduit la loi de Gauss:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int 4\pi\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')\rho(\vec{r}')\, d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Intégration reproduit la forme intégrale:

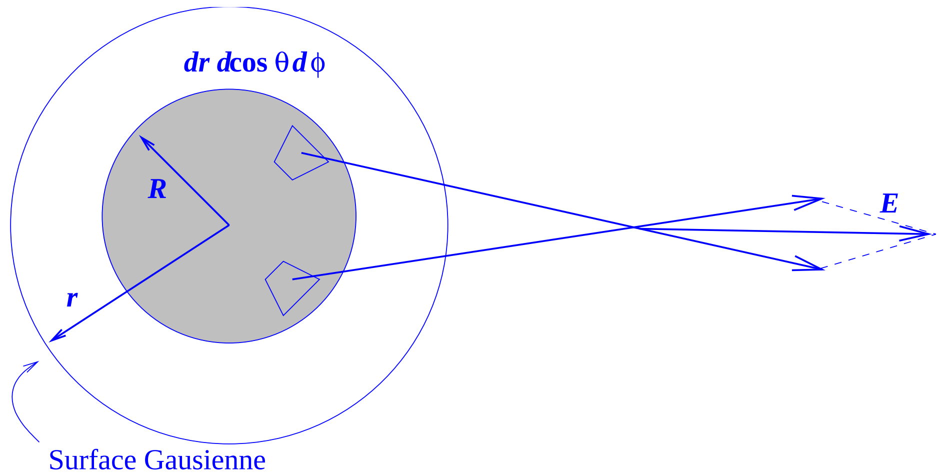
$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\vec{E}\, d\tau}_{\oint \vec{E}\, d\vec{a}} = \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho\, d\tau}_{\frac{1}{\epsilon_0}Q_{inc}}$$

Applications de la loi de Gauss: Sphère

Exemple: Champ autour d'une sphère solide de rayon $\boldsymbol{R}$ et charge totale $\boldsymbol{q}$

Pour surface Gaussienne sphérique, $r > R$, autour de la sphère (comme pour toute autre surface!):

$$\oint \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Symétrie permet d'extraire $\vec{E}$ de l'intégrale. Direction radiale, magnitude constante

$$\oint \vec{E}\, d\vec{a} = \oint |\vec{E}|\, da = |\vec{E}| \oint da = |\vec{E}|\, 4\pi r^2$$

Champ autour de la sphère:

$$|\vec{E}|\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\vec{r}}$$

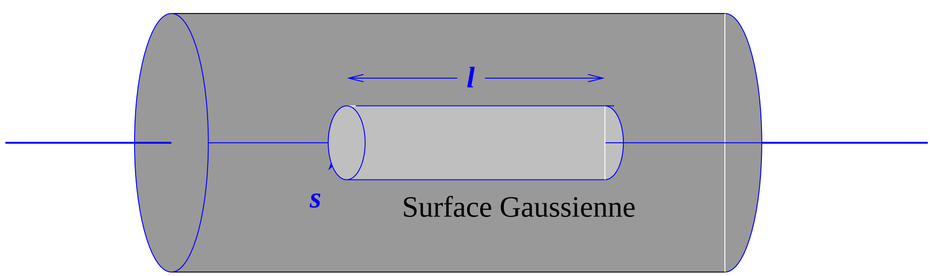
Même champ que pour une charge ponctuelle q à l'origine.

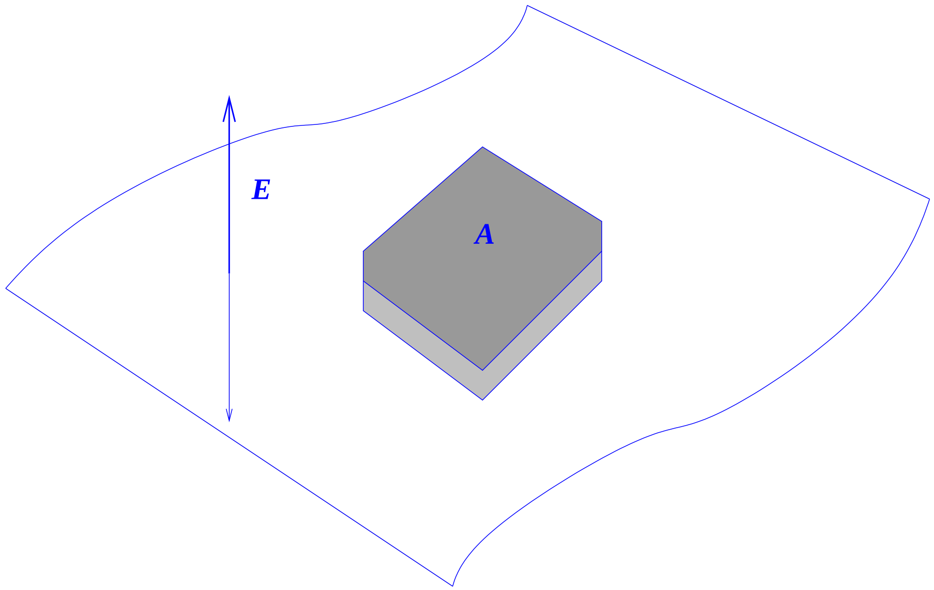
Applications de la loi de Gauss: Symétries

Loi de Gauss est un outil très puissant pour le calcul des champs. Mais, voir exemple précedent: $\vec{E}||d\vec{a}$, $|\vec{E}| =$ const. Symétrie est cruciale pour tirer profit de la loi de Gauss:

- *Symétrie sphérique:* surface Gausienne sphérique concentrique;
- *Symétrie cylindrique:* surface cylindrique coaxiale;
- *Symétrie planaire:* surface d'une boîte avec face parallèle.

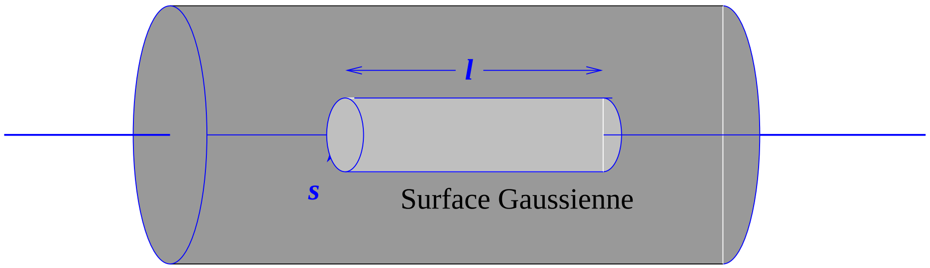
Souvent solution exacte reclame cylindres infiniment longs ou plans s'étendant jusqu'à l'infini; mais solution approximative toutefois valable loin des limites.





Applications de la loi de Gauss: Cylindre

Exemple: Un long fil cylindrique de rayon $\boldsymbol{R}$, avec densité de charge $\boldsymbol{\rho = kr}$, $\boldsymbol{k}$ =const. Trouver le champ a l'intérieur du fil.



Surface Gausienne: cylindre coaxial, longeur $\boldsymbol{l}$, rayon $\boldsymbol{s}$:

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0}$$

Charge incluse dans surface Gausienne:

$$Q_{inc} = \int \rho\, d\tau = \int (ks')\,(s'\,ds'\,d\phi\,dz) = 2\pi kl \int_0^s s'^2\,ds' = \frac{2}{3}\pi kls^3$$

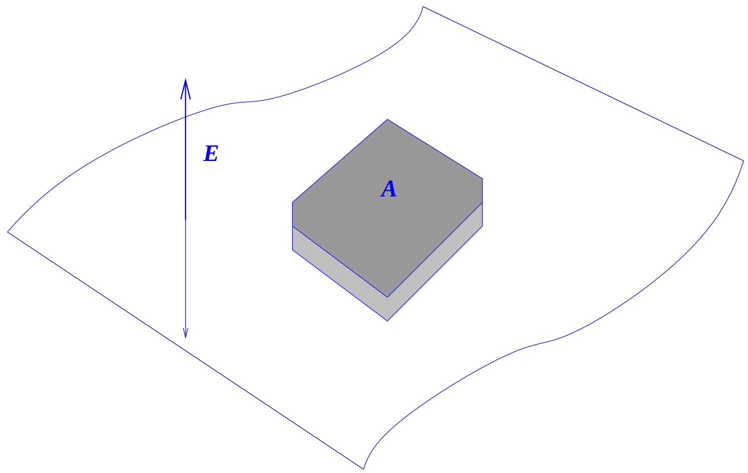
Symétrie: $\vec{E}$ radial, surface cylindrique contribue:

$$\int \vec{E}\, d\vec{a} = \int |\vec{E}|\, da = |\vec{E}| \int da = |\vec{E}| 2\pi sl$$

Couvercles ne contribuent pas, $\vec{E} \perp \vec{a}$.

$$|\vec{E}| 2\pi sl = \frac{2}{3}\pi kls^3 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{k}{3\epsilon_0} s^2 \hat{\vec{s}}$$

Applications de la loi de Gauss: Plan



Exemple: Un grand plan, avec densité de charge σ =const. Trouver le champ.

Surface Gaussiene:
boîte de surface A, hauteur h quelconque:

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0}$$

Charge incluse dans surface Gausienne:

$$Q_{inc} = \sigma A$$

Symétrie: $\vec{E}$ normal au plan. Surfaces parallel au plan:

$$\int \vec{E}\, d\vec{a} = 2A|\vec{E}|$$

Autres surfaces ne contribuent pas, $\vec{E} \perp \vec{a}$.

$$2A|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} A \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\vec{n}}$$

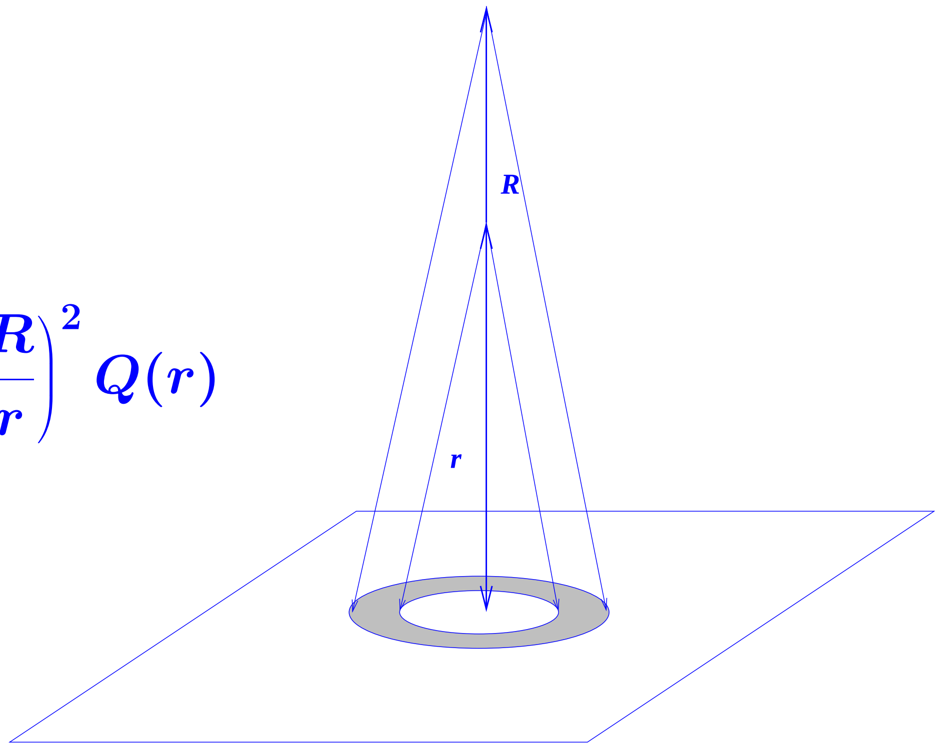
Applications de la loi de Gauss: Plan

Résultat interessant: champ ne diminue pas comme $1/r^2$ mais reste constant. Pourquoi?

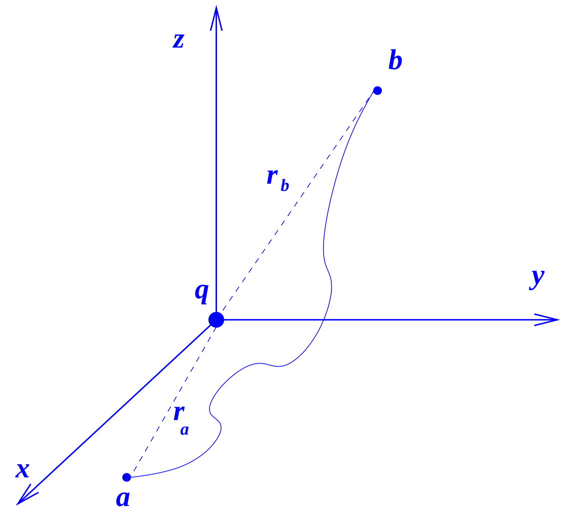
Influence de la charge incluse dans un segment d'angle solide constant:

$$r \to R \quad \longrightarrow \quad Q(r) \to Q(R) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 Q(r)$$

Charge "visible" augmente comme carré de la distance, compensation.



Le rotationel du champ électrique



Champ d'une seule charge q à l'origine:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

Calculons d'abord l'intégrale le long d'un parcours de $\vec{a}$ à $\vec{b}$:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Coordonnées sphériques:

$$d\vec{l} = dr\,\hat{\vec{r}} + r d\theta\,\hat{\vec{\theta}} + r\sin\theta d\phi\,\hat{\vec{\phi}}$$

$$\vec{E}\,d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\,d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\vec{a}}^{\vec{b}}\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Pour chaque parcours clos:

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$

Le rotationel du champ électrique

Pour chaque parcours clos:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

Théorème de Stokes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\, d\vec{a} &= \oint_{\mathcal{P}} \vec{E}\, d\vec{l} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Principe de superposition:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_1\right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_2\right) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Pour toute distribution statique de charges:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Equations de Maxwell et de Lorentz

Lois de Gauss et de Coulomb font partie des

lois fondamentales de l'électrodynamique:

Equations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques sont produits:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Electrostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$$

Equations de Lorentz décrivent comment les champs électriques et magnétiques agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Electrostatique:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Le potentiel électrique

Les champs électriques forment une classe de champs vectoriels avec

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Exemple de cette restriction:

$$\vec{E} \stackrel{?}{=} y\hat{\vec{x}}$$

ne peut être généré par aucune distribution de charges.

Champs sans rotationel découlent d'un potentiel scalaire:

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ implique $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ (théorème de Stokes)
- L'intégrale $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\; d\vec{l}$ est indépendante du parcours entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, sinon on pourrait trouver un parcours $\vec{a} \longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$ tel que $\oint \vec{E}\, d\vec{l} \neq 0$
- Par conséquent, on définit le potentiel électrique

$$V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

où $\mathcal{O}$ est un point de référence. V dépend uniquement de $\vec{r}$.

Le potentiel électrique

Quelle est l'utilité du potentiel électrique

$$V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Différence de potentiel entre points $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} V(\vec{b}) - V(\vec{a}) &= -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\vec{a}} \vec{E}\, d\vec{l} \\ &= -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} - \int_{\vec{a}}^{\mathcal{O}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} \end{aligned}$$

Théorème des gradients:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} V\, d\vec{l}$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla} V\, d\vec{l} = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

pour tous points $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Par conséquent, tout champ électrostatique découle d'un potentiel:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Attention: il ne faut pas confondre le potentiel avec l'énergie potentielle.

Discussion du potentiel électrique

Comment un vecteur de 3 composantes peut-il découler d'une fonction scalaire à une composante?

Réponse: conditions additionelles!

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Discussion du potentiel électrique (cont.)

Point de référence arbitraire, déplacé de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}'$:

$$V'(\vec{r}) \;=\; -\int_{\mathcal{O}'}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{\mathcal{O}'}^{\mathcal{O}} \vec{E}\, d\vec{l} - \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l} = k + V(\vec{r})$$

Le potentiel est défini à une constante k près. Défaut ou vertu?

Choix du point de référence ne met en cause ni la différence de potentiel ni le gradient:

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) \;=\; V'(\vec{b}) - V'(\vec{a})$$
$$\vec{\nabla} V' \;=\; \vec{\nabla} V$$

Tous les $V + k$ représentent le même champ $\vec{E}$.

Point naturel de référence à distance infinie de la charge, définit le "point" où $V(\mathcal{O}) = 0$.

Attention: cela ne marche pas si la distribution elle-même s'étend vers l'infini! Voir champ du plan infini, $\vec{E} = (\sigma/2\epsilon_0)\hat{\vec{n}}$:

$$V(z) \;=\; -\int_{\infty}^{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\, dz = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(z - \infty)$$

Il faut choisir un autre point comme l'origine. En réalité toutefois, aucune distribution ne s'étend jusqu'à l'infini.

Discussion du potentiel électrique (cont.)

Champ et potentiel obéissent au principe de superposition:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots \\
\vec{F}/Q &= \vec{F}_1/Q + \vec{F}_2/Q + \cdots \\
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots \\
\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{l} &= \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}_2 d\vec{l} + \cdots \\
V &= V_1 + V_2 + \cdots
\end{aligned}$$

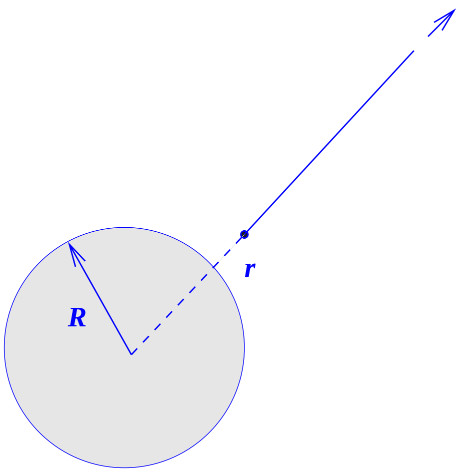
Potentiel à un point $\vec{r}$ est la somme de tous les potentiels dus aux différentes charges sources.

Unités en système SI:

- Force: $[F] =$ N, Newton
- Champ électrique: $[E] = [F]/[Q] =$ N/C, Newton/Coulomb
- Potentiel: $[V] =$ N $\cdot$ m/C $=$ J/C $\equiv$ V, Volt

Exemple: Potentiel d'un ballon chargé

Potentiel à l'intérieur et l'extérieur d'un ballon de rayon R, chargé uniformement, charge totale q. Point de reférence à l'infini. Démo 164



Champ à l'intérieur zéro. Champ extérieur, par loi de Gauss:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{q}{r'^2}\, dr' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{q}{r'}\right|_{\infty}^{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad r > R$$

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{q}{r'^2}\, dr' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R}^{r} 0\, dr' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{q}{r'}\right|_{\infty}^{R} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \qquad r < R$$

Attention: Champ à l'intérieur est zéro, mais le potentiel ne l'est pas, il est constant. De toute façon, $\vec{\nabla} V = \vec{E} = 0$.

Grâce à l'intégrale $\int_{\infty}^{\vec{r}}$, le potentiel est sensible même aux charges qui ne produisent pas de champ à $\vec{r}$. C'est pour cela que je (!) considère le potentiel comme plus fondamental. (voir Aharonov et Bohm, Physical Review **115** (1959) 485)

Equations de Poisson et de Laplace

Equations fondamentales pour champ électrostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

En termes du potentiel V, équation de Poisson:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}V\right) = -\vec{\nabla}^2 V$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dans des régions où $\rho = 0$, équation de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Rotationnel d'un gradient vaut toujours zéro:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}V\right) \equiv 0$$

Potentiel d'une distribution de charges

Loi de Poisson: donne ρ si V est connu. Comment obtenir V de ρ?

Charge à l'origine:

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{q}{r'^2}\,dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{q}{r'}\right|_\infty^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

Position quelconque de la charge source:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathrm{r}}$$

où r est la distance entre la position de la source et $\vec{r}$.

Superposition de sources: Démo 168

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathrm{r}_i}$$

Distribution continue:

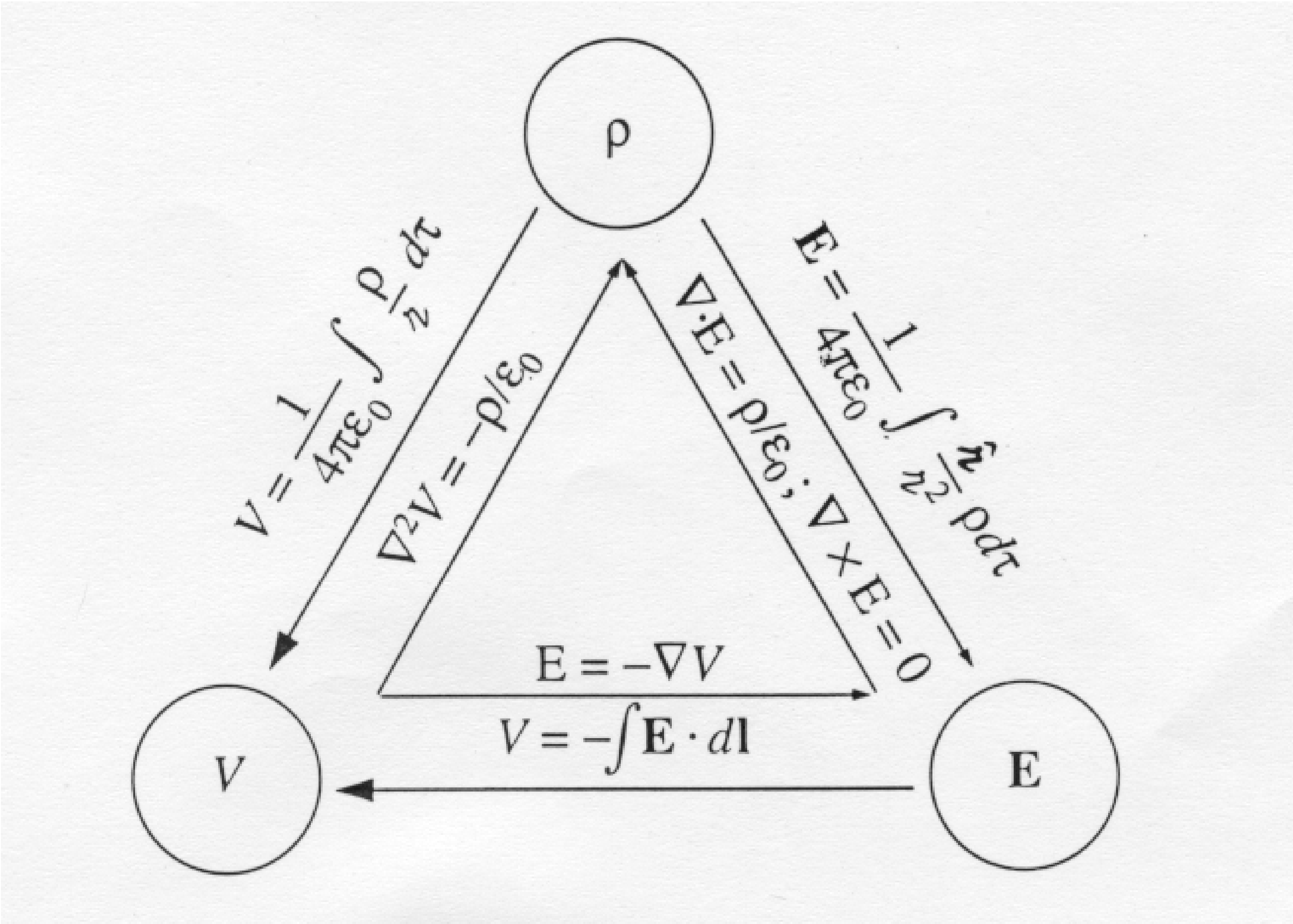
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{\mathrm{r}}\,dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{\mathrm{r}}\,d\tau'$$

A comparer avec champ électrique:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\rho(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\,\hat{\vec{\mathrm{r}}}\,d\tau'$$

Sommaire: charge, champ, potentiel

Electrostatique:



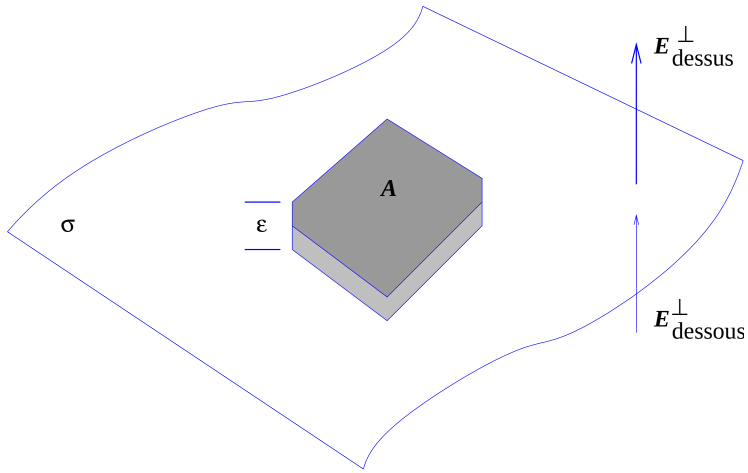
Griffith, figure 2.35, page 87

Conditions électrostatiques de (dis-)continuité

Composante normale du champ, $\boldsymbol{E}^{\perp}$, change d'une manière abrupte quand on traverse une surface chargée:

$$\oint_{S} \vec{E}\, d\vec{a} = \frac{Q_{inc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

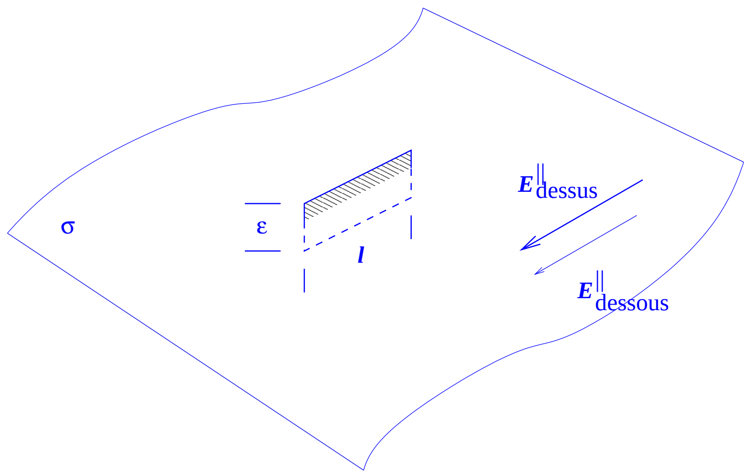
$$E^{\perp}_{dessus} - E^{\perp}_{dessous} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Composante parallèle à la surface, $\vec{E}^{||}$, est continue:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}^{||}_{dessus} - \vec{E}^{||}_{dessous} = 0$$



Conditions électrostatiques de (dis-)continuité

En passant par une surface chargée, la discontinuité est:

$$\vec{E}_{dessus} - \vec{E}_{dessous} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\vec{n}}$$

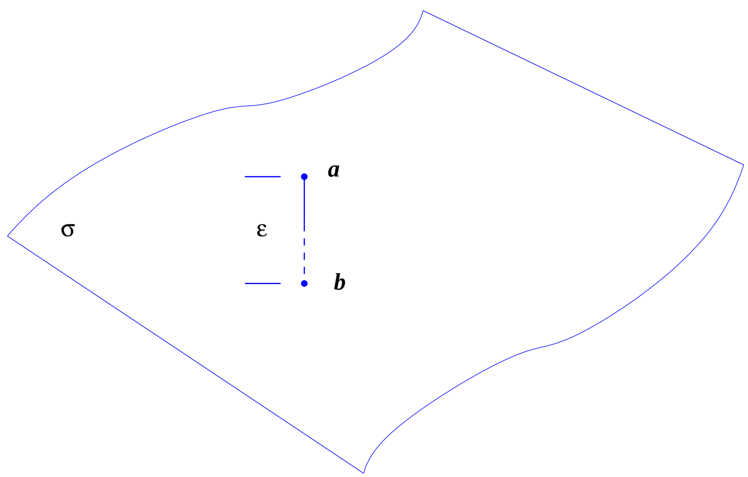
où $\hat{\vec{n}}$ est la normale pointant vers le “dessus”.

Notez la symétrie “dessus” ↔ “dessous”.

Potentiel est continu à la surface:

$$V_{dessus} - V_{dessous} = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} \overset{\epsilon \to 0}{=} 0$$

mais le gradient de V hérite de la discontinuité de $\vec{E}$



$$\vec{\nabla} V_{dessus} - \vec{\nabla} V_{dessous} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\hat{\vec{n}}$$

$$\frac{\partial V_{dessus}}{\partial n} - \frac{\partial V_{dessous}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \vec{\nabla} V \cdot \hat{\vec{n}}$$

Rappel: Equations de Maxwell et de Lorentz

Lois de Gauss et de Coulomb font partie des

lois fondamentales de l'électrodynamique:

Equations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques sont produits:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Electrostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

Equations de Lorentz décrivent comment les champs électriques et magnétiques agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Electrostatique:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

Rappel: Le potentiel électrique

Les champs électriques forment une classe de champs vectoriels avec

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

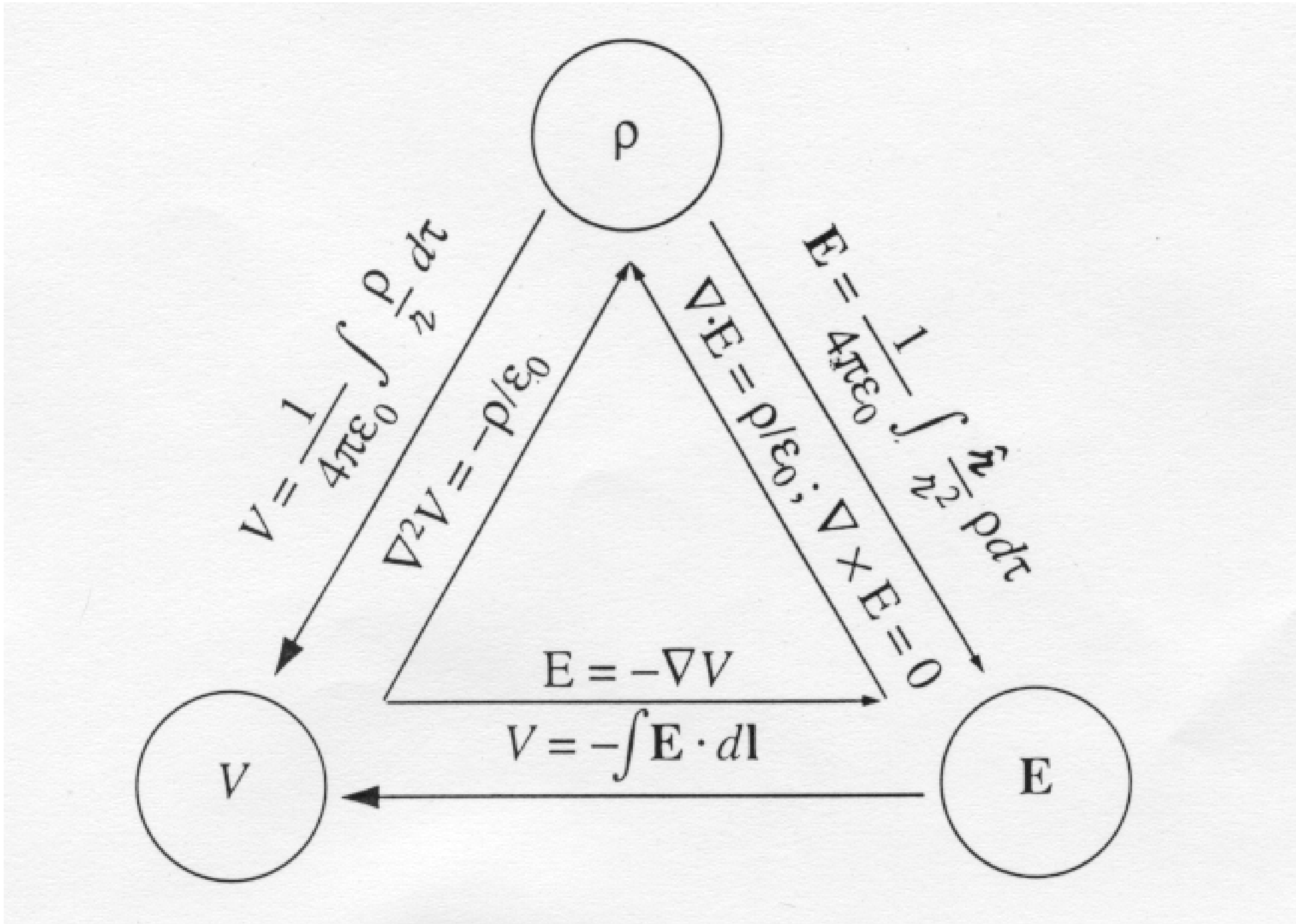
Champs sans rotationel découlent d'un potentiel scalaire:

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ implique $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ (théorème de Stokes)
- L'intégrale $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\; d\vec{l}$ est indépendante du parcours entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, sinon on pourrait trouver un parcours $\vec{a} \longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$ tel que $\oint \vec{E}\, d\vec{l} \neq 0$
- Par conséquent, on définit le potentiel électrique

$$V(\vec{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

où $\mathcal{O}$ est un point de référence. V dépend uniquement de $\vec{r}$.

Rappel: Charge, champ et potentiel électrostatique



Griffith, figure 2.35, page 87

Travail et énergie électrostatique

Travail contre la force électrostatique:

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}\, d\vec{l} = -Q \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} = Q \left[V(\vec{b}) - V(\vec{a}) \right]$$

indépendant du parcours entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$: force conservative.

La différence de potentiel entre deux points $\vec{a}$ et $\vec{b}$ correspond au travail par unité de charge necessaire pour transporter une particule de $\vec{a}$ à $\vec{b}$.

Pour introduire une charge de l'extérieur, il faut

$$W = Q \left[V(\vec{b}) - V(\infty) \right]$$

Si le point de reférence pour le potentiel se trouve à l'infini:

$$W = QV(\vec{b})$$

Potentiel est énergie par unité de charge, champ est force par unité de charge.

Energie stockée dans une collection de charges

Travail pour assembler une collection de charges:

- première charge q_1: aucun travail, $\vec{E}_0 = 0$
- deuxième charge: travail contre le champ E_1 de q_1

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{\mathrm{r}_{12}}\right)$$

- troisième charge: travail contre le champs E_1 de q_1 et E_2 de q_2

$$W_3 = q_3 V_1(\vec{r}) + q_3 V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{\mathrm{r}_{13}} + \frac{q_2}{\mathrm{r}_{23}}\right)$$

Règle générale pour n charges:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{n} \left(\frac{q_i q_j}{\mathrm{r}_{ij}}\right)$$

La condition $j > i$ évite de compter le même travail deux fois.
Calcul alternatif:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{q_i q_j}{\mathrm{r}_{ij}}\right)$$

Energie stockée dans une collection de charges

Travail est indépend de l'ordre d'assemblage:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{q_i q_j}{\mathbf{r}_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{q_j}{\mathbf{r}_{ij}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)
\end{aligned}
$$

où $V(\vec{r}_i)$ dénote le potentiel de toutes les autres charges à l'endoit de la charge q_i.

W est dépensé quand on assemble le système, rendu quand on le démantèle. C'est donc l'énergie stockée dans le système, l'énergie potentielle.

Energie stockée dans une distribution de charges

Distribution continue:

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2}\int \rho V\, d\tau}$$

On peut reécrire ceci en termes du champ $\vec{E}$:

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E} \quad \rightarrow \quad W = \frac{\epsilon_0}{2}\int \vec{\nabla}\vec{E} V\, d\tau$$

Intégration par parties:

$$\begin{aligned}
\int \vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right)\, d\tau &= \int f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\, d\tau + \int \vec{A}\left(\vec{\nabla}f\right)\, d\tau = \oint f\vec{A}\, d\vec{a} \\
\int_{\mathcal{V}} f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\, d\tau &= -\int_{\mathcal{V}} \vec{A}\left(\vec{\nabla}f\right)\, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} f\vec{A}\, d\vec{a} \\
W &= \frac{\epsilon_0}{2}\left[-\int \vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}V\right)\, d\tau + \oint V\vec{E}\, d\vec{a}\right] \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2\, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V\vec{E}\, d\vec{a}\right)
\end{aligned}$$

Energie stockée dans une distribution de charges

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_{\mathcal{V}} E^2\, d\tau + \oint_{\mathcal{S}} V\vec{E}\, d\vec{a}\right)$$

Intégrer sur quel volume?

– $\int \rho V\ d\tau$ réclame d'intégrer sur tout $\rho \neq 0$
– Tout volume qui entoure toutes les charges fera l'affaire
– Alors pourquoi pas tout l'espace?

$$\int_{\mathcal{V}} E^2\, d\tau \qquad \text{ne diminue pas à cause de } E^2 > 0$$

$$\oint_{\mathcal{S}} V\vec{E}\, d\vec{a} \propto \frac{1}{r}\frac{1}{r^2}r^2 \propto \frac{1}{r}$$

– Pour tout l'espace, $\oint_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0$:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\infty} E^2\, d\tau$$

Exemple: Energie d'un ballon chargé

Energie d'un ballon sphérique chargé, charge totale q, rayon R.

Solution avec ρ et V, intégré sur une sphère contenant le ballon:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \rho V \, d\tau = \frac{1}{2}\int \sigma V \, da \\ V(R) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R} \\ W &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}\int \sigma \, da = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R} \end{aligned}$$

Solution avec E:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{cases} 0 & \text{à l'intérieur} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}} & \text{à l'extérieur} \end{cases} \\ E^2 &= \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} \\ W &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_\infty E^2 \, d\tau \\ &= \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \times \\ &\quad \times \int_R^\infty \left(\frac{q^2}{r^4}\right)(r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi) \\ &= \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} q^2 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R} \end{aligned}$$

Deux poids, deux mesures?

Contradiction flagrante:

Energie d'une distribution stationaire toujours positive:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau > 0$$

Energie d'une collection stationaire de charges:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)$$

peut être négative. Exemple: deux charges égales et opposées à distance $\mathbf{r}$

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{\mathbf{r}} < 0$$

Deux poids, deux mesures?

Qui a raison? Attention: dans les deux cas la question n'est pas la même!

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$$

Dans une distribution continue on ne peut pas exclure la charge q_i à $\vec{r}_i$ du calcul du potentiel. L'énergie tient alors compte de toutes les charges.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)$$

Dans le cas des charges individuelles, on exclut explicitement la charge q_i à $\vec{r}_i$ dans le calcul du potentiel. Par conséquent, l'énergie ne contient pas l'énergie propre des charges.

En effet, l'énergie propre d'une charge ponctuelle est infinie:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^\infty \left(\frac{q^2}{r^4}\right) (r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = \infty$$

Problème assez embarassant, résolu par la théorie des champs quantiques.

Où est l'énergie?

L'énergie électrostatique est-elle stockée. . .

dans le champ électrique:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\, d\tau \ ?$$

dans la distribution des charges:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho V\, d\tau \ ?$$

L'électrostatique ne peut pas répondre, deux calculs de la même chose.

Réponse donné par la théorie de la radiation par charges en mouvement (voir Electrodynamique II) et la relativité:

Energie électrique est stocké dans le champ électrique, avec densité

$$\frac{\epsilon_0}{2}E^2$$

de l'énergie par unité de volume.

Pause!

Conducteurs dans un champ électrostatique

Isolants:

- Electrons sont fortement liés aux atomes/molécules, neutralité locale

Conducteurs:

- Charges se déplacent avec une certaine liberté
- Métaux: électrons se déplacent d'un atome à l'autre
- Gaz et liquides: ions sont mobiles
- Une certaine résistance s'oppose au déplacement des charges, sauf pour les supraconducteurs

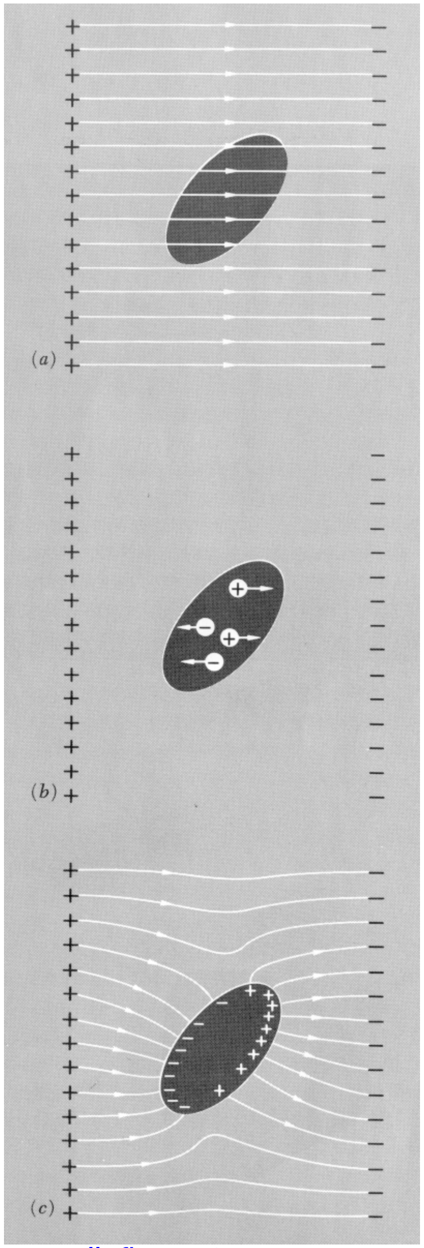
Champ électrique dans et autour des conducteurs

- $\vec{E} = 0$ à l'intérieur d'un conducteur. Charges à l'intérieur sont déplacées jusqu'à ce que leur champ compense exactement le champ extérieur.
- Les charges se déplacent, mais $\rho = 0$ à l'intérieur d'un conducteur. Loi de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = 0 \rightarrow \rho = 0$$

- Par conséquent, toute la charge nette se retrouve à la surface du conducteur. Cela minimise l'énergie potentielle: pour une sphère chargée homogènement elle est $(3/20\pi\epsilon_0)(q^2/R)$, mais $(1/8\pi\epsilon_0)(q^2/R)$ si la charge est uniformement distribuée sur la surface. Demo 164
- Attention: cela ne veut pas dire que la distribution en charge surface est homogène!



Purcell, figure 3.1

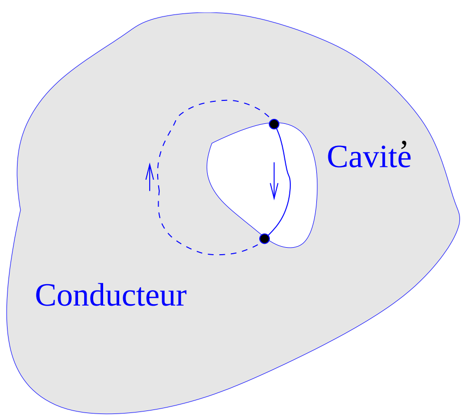
Champ électrique dans et autour des conducteurs

– Le potentiel est le même partout dans le conducteur, parce que

$$V(\vec{a}) - V(\vec{b}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\, d\vec{l} = 0.$$

– Le champ électrique est partout normal à la surface du conducteur, sinon le champ tangentiel déplacerait les charges jusqu'à compensation totale.

– Si l'on creuse une cavité à l'intérieur d'un conducteur, le champ dans la cavité est zéro (sauf si elle même contient des charges). Sinon, l'intégrale le long d'un parcours qui traverse la cavité serait zéro dans le conducteur, mais non-zéro dans la cavité, en contradiction avec $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$.



– Ceci explique le concept de la cage de Faraday. Dans une voiture, on ne peut pas être électrocuté si l'on ne touche à rien (mais on peut tout de même être grillé!)

Charge de surface et force sur un conducteur

Champ à l'intérieur d'un conducteur est zéro. Au delà de sa surface:

$$\vec{E}_{dessus} - \vec{E}_{dessous} = \vec{E}_{dessus} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\vec{n}}$$

En termes du potentiel:

$$\frac{\partial V_{dessus}}{\partial n} - \frac{\partial V_{dessous}}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma \quad \rightarrow \quad \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

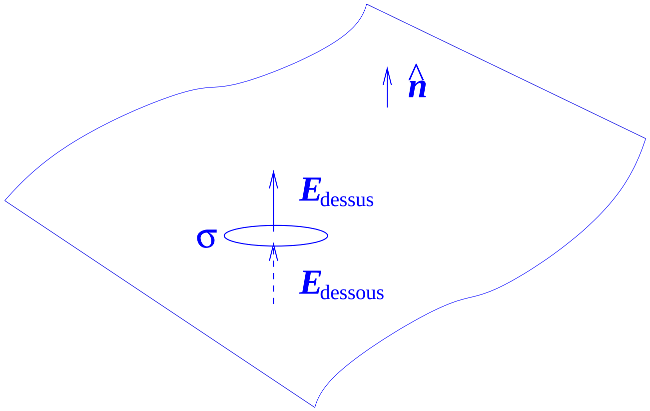
Permet de calculer σ quand on connait V ou $\vec{E}$ à la surface.

Champ extérieur exerce une force $q\vec{E}$ sur une surface chargée. Force par unité de surface:

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}_{moyen} = \sigma \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{dessus} - \vec{E}_{dessous}\right)$$

Pour un conducteur, $\vec{E}_{dessous} = 0$:

$$\vec{f} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2 \hat{\vec{n}}$$

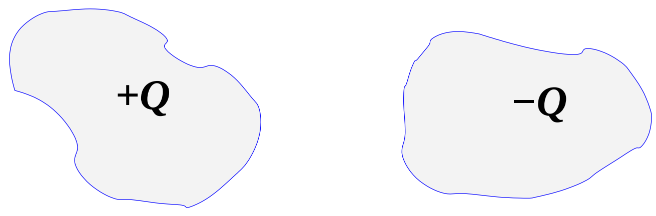


Pression électro statique:

$$P = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$$

Condensateur et capacité

Deux conducteurs, avec charges égales et opposées $\pm Q$, forment un condensateur. Potentiel est constant dans un conducteur, différence en potentiel entre les deux:



$$V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Distribution de la charge sur la surface – et par conséquent le champ – peut être compliqué, mais:

$$V \propto |\vec{E}| \propto Q$$

On définit la constante de proportionalité, la capacité:

$$C \equiv \frac{Q}{V}$$

Quantité d'origine purement géométrique, déterminé par taille, forme et distance des conducteurs. Unités dans le système SI:

$$[C] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}$$

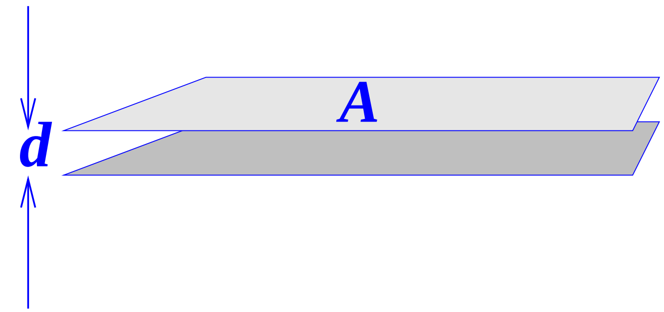
Unité extrèmement large, plus pratique: μF = 10^{-9}F, pF = 10^{-12}F. Capacité est toujours positive.

Capacité d'un condensateur à plans parallèls

Capacité de deux conducteurs métalliques plats, surface A, à distance d.

On met charges $+Q$ sur le plan supérieur, $-Q$ sur le plan inférieur. Si A est large, et d est petit les charges se répartiront d'une manière constante sur la surface:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$
$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0}d$$
$$C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$



Demo 170

Exemple numérique: $A = 1\text{cm}^2$, $d = 1\text{mm}$:

$$C = \frac{10^{-4} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}{1 \times 10^{-3}} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}\frac{\text{m}^2}{\text{m}} \simeq 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}} = 10^{-12}\,\frac{\text{C}}{\text{V}} = 1\text{pF}$$

Capacité de deux sphères concentriques

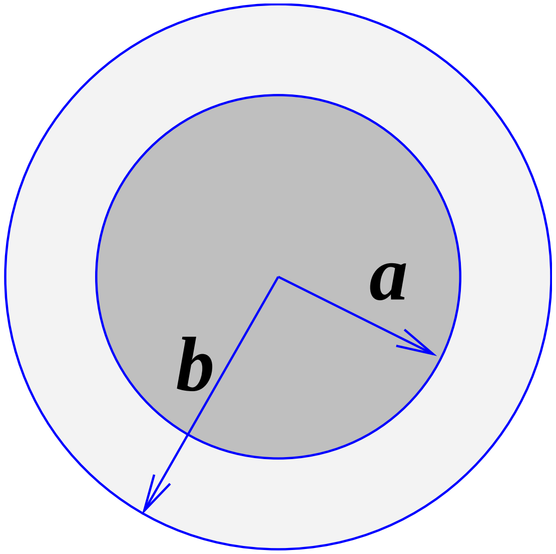
Capacité de deux conducteurs métalliques sphériques concentriques, rayons a et b.

On met charges $+Q$ sur la plan sphère intérieure, $-Q$ sur la sphère extérieure. Le champ entre les deux est (loi de Gauss):

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

$$V = -\int_b^a \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{(b-a)}$$



Travail pour charger un condensateur

Pour charger un condensateur on transporte la charge Q d'un conducteur à l'autre. Travail contre le champ électrique?

A un moment donné, soit q la charge sur un conducteur, différence en potentiel q/C. Travail pour transporter dq en plus:

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq$$

Travail total:

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \underbrace{=}_{Q=CV} \frac{1}{2}CV^2$$

Demo 171/172

Rappel: Energie stockée dans une distribution de charges

Energie stockée dans une distribution de charges:

Distribution continue:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$$

Dans une distribution continue on ne peut pas exclure la charge q_i à $\vec{r}_i$ du calcul du potentiel. L'énergie tient alors compte de toutes les charges.

Distribution discrète:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V(\vec{r}_i)$$

Dans le cas des charges individuelles, on exclut explicitement la charge q_i à $\vec{r}_i$ dans le calcul du potentiel. Par conséquent, l'énergie ne contient pas l'énergie propre des charges.

L'énergie électrique est stocké dans le champ électrique, avec densité

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

de l'énergie par unité de volume.

Rappel: Capacité d'un condensateur à plans parallèls

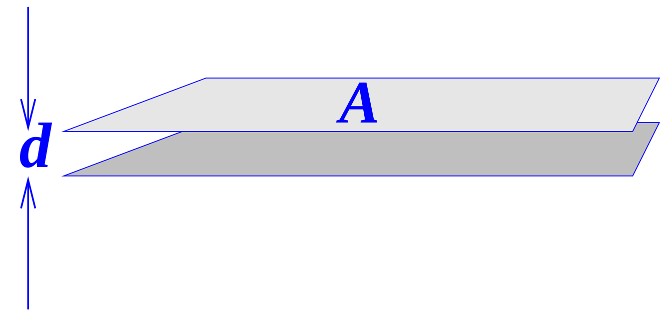
Capacité de deux conducteurs métalliques plats, surface A, à distance d.

On met charges $+Q$ sur le plan supérieur, $-Q$ sur le plan inférieur. Si A est large, et d est petit les charges se répartiront d'une manière constante sur la surface:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0}d$$

$$C \equiv \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$



Demo 170

La capacité est une quantité d'origine purement géométrique, déterminé par taille, forme et distance des conducteurs. Unités dans le système SI: $[C] = \mathrm{C/V} = \mathrm{F}$.

Rappel: travail pour charger un condensateur

Pour charger un condensateur on transporte la charge Q d'un conducteur à l'autre. Travail contre le champ électrique?

A un moment donné, soit q la charge sur un conducteur, différence en potentiel q/C. Travail pour transporter dq en plus:

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq$$

Travail total:

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \underbrace{=}_{Q=CV} \frac{1}{2}CV^2$$

Demo 171/172

Astuces: l'équation de Laplace

But de l'électrostatique: calcul du champ à partir de la distribution de charges.

Méthodes:

– Directe via la loi de Colomb:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

– Via le potentiel:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathrm{r}}\rho(\vec{r}')\,d\tau'$$

– Via la loi de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Dans les deux derniers cas, le champ est obtenu par $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Astuces: l'équation de Laplace

– Loi de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

– Cas spécial, loi de Laplace, valable où densité de charge locale est zéro:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Géométriquement: la somme des courbures de V dans les trois directions de l'espace (cartésien ou non) égale zéro, s'il n'y a pas de charges.

– Solutions: fonctions harmoniques, théorie complète dépasse le cadre de ce cours

– Exemples: problèmes à une, deux et trois dimensions.

L’équation de Laplace à une dimension

Système où V dépend d’une seule variable:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

Solution générale:

$$V(x) = mx + b$$

avec m et b fixé par les conditions aux limites.

Solutions ne sont pas très intéressantes, mais montrent des caractéristiques générales:

– A chaque endroit x, $V(x)$ est la moyenne des potentiels voisins:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left[V(x+a) + V(x-a)\right]$$

Ceci donne la fonction la plus lisse possible qui satisfait les conditions aux limites.

– Ceci veut aussi dire que l’équation de Laplace ne tolère pas de minima ou maxima locaux. Les valeurs extrêmes de V doivent se trouver aux limites de l’espace considéré.

L'équation de Laplace à deux dimensions

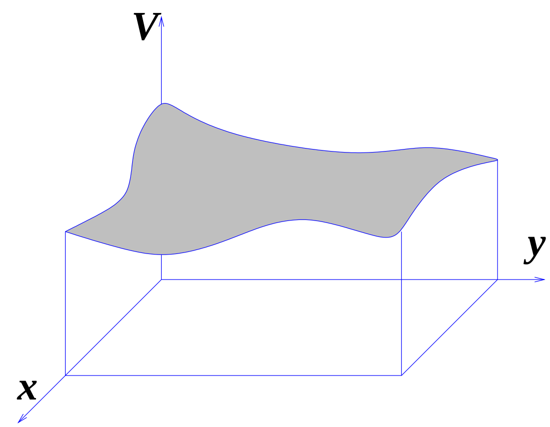
Système où V dépend de deux variables:

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Attention: équation différentielle partielle (au lieu d'une ordinaire).

Conséquence: solution ne dépend pas de deux constantes fixées par les conditions aux limites. En effet, solution générale explicite n'existe pas.

Pour aider l'intuition: imaginer une boite à chaussures, avec les axes x et y fixés à la base. Découper les bords ainsi que la hauteur représente $V(x_{min},y)$, $V(x_{max},y)$, $V(x,y_{min})$, $V(x,y_{max})$ aux quatres limites. Etendre une peau de caoutchouc sur les bords, comme la peau d'un tambour. La hauteur de la peau représente $V(x,y)$ qui satisfait (approximativement) l'équation de Laplace.



L’équation de Laplace à deux dimensions

Caractéristiques des fonctions harmoniques, solutions de l’équation de Laplace à deux dimensions:

– Valeur de $V(x,y)$ est la moyenne des valeurs voisines:

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{cercle} V\ dl$$

Ceci suggère la méthode de relaxation pour calculer V à partir des valeurs aux bords.

– V n’a ni maxima ni minima, toutes les valeurs extrèmes sont situées sur les bords. L’équation de Laplace sélectionne la solution la plus lisse compatible avec les conditions aux limites.

– Il n’y a pas un nombre fini de constantes d’intégration, mais les solutions sont définies par les valeurs du potentiel sur les bords.

L'équation de Laplace à trois dimensions

Caractéristiques des solutions de l'équation de Laplace à trois dimensions:

– Valeur de $V(\vec{r})$ est la moyenne des valeurs autour de $\vec{r}$ sur une sphère de rayon R:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{sphere} V \, da$$

– Par conséquent, V n'a ni maxima ni minima, ses valeurs extrèmes se situent sur les bords de l'espace considéré. Car si, par exemple, V avait un maximum, on pourrait trouver une sphère autour telle que les valeurs de V sur la surface seraient plus petites que la valeur au milieu (et leur moyenne serait plus petite aussi).

Premier théorème d'unicité

Premièr théorème d'unicité:

– La solution de l'équation de Laplace dans un volume $\mathcal{V}$ est déterminée d'une manière unique par les valeurs de V sur la surface $\mathcal{S}$ limitant le volume.

Démonstration:

Supposons qu'il y ait deux solutions, V_1 et V_2, qui aient les mêmes valeurs aux bords du volume, et qui satisfont l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \nabla^2 V_2 = 0$$

La différence doit aussi obéir à l'équation de Laplace:

$$\begin{aligned} V_3 &\equiv V_1 - V_2 \\ \nabla^2 V_3 &= \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0 \end{aligned}$$

En plus, $V_3 = 0$ sur tout $\mathcal{S}$ par construction.

L'équation de Laplace reclame que tous les maxima et minima de V_3 se situent sur $\mathcal{S}$, et par conséquent V_3 vaut zéro partout dans $\mathcal{V}$:

$$\max V_3 = \min V_3 = 0 \quad \rightarrow \quad V_3 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = V_2$$

Exemple: potentiel à l'intérieur d'une sphère conductrice

Nous avons déjà conclu que le potentiel à l'intérieur d'une sphère conductrice est constant.

Démonstration de ce fait avec l'équation de Laplace:

Le potentiel sur la sphère est une constante, V_0. Le potentiel à l'intérieur doit obéir à l'équation de Laplace et être constant aux bords. On n'a pas besoin d'être un génie pour deviner la solution $V = V_0$ partout dans la sphère. Le théorème d'unicité nous permet ensuite de conclure que cette solution est la seule solution.

Ceci est un outil puissant: si l'on trouve, par n'importe quel moyen, une solution qui obéit à l'équation de Laplace et respecte les valeurs prescrites aux bords, on n'a pas besoin de chercher plus loin.

Charges dans le volume

Si le volume contient des charges, l'équation de Poisson s'applique, mais le théorème reste intact:

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad ; \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho + \frac{1}{\epsilon_0}\rho = 0$$

Alors, la différence doit être zéro, parce qu'elle satifait l'équation de Laplace et vaut zéro aux bords.

Corollaire:

– Le potentiel dans un volume $\mathcal{V}$ est déterminé d'une façon unique par ses valeurs aux bords et la densité de charge partout dans le volume.

La méthode la plus simple pour fixer un potentiel aux bords d'un volume est de l'entourer par des conducteurs, reliés à des batteries ou à la "terre".

Deuxième théorème d'unicité

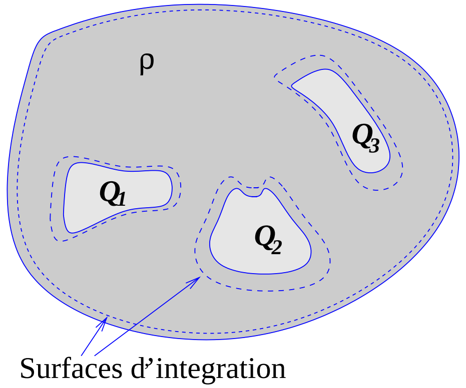
Peut-on aussi fixer le système en déterminant les charges sur les surfaces limitantes? Les charges se distribuent d'une manière inconnue, àfin de minimiser l'énergie totale du système. En plus le volume peut contenir des distributions de charges à son intérieur.

Deuxième théorème d'unicité:

– Dans un volume $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ entouré de conducteurs et qui contient une densité de charges spécifiée partout, le champ électrique est déterminé d'une façon unique si la charge totale de chaque conducteur dans le volume est connue.

Démonstration:
Supposons qu'il y ait deux champs qui satisfont aux conditions citées.

Ils suivent la loi de Gauss dans l'espace entre les conducteurs et autour des conducteurs:

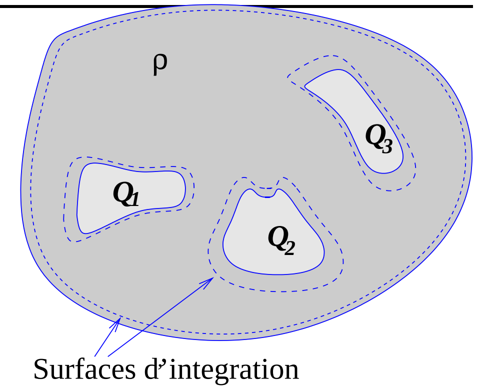


$$\vec{\nabla}\vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad ; \quad \vec{\nabla}\vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

$$\oint_{\mathcal{S}_i} \vec{E}_1\, d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i \quad ; \quad \oint_{\mathcal{S}_i} \vec{E}_2\, d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i$$

Deuxième théorème d’unicité

De la même manière pour un conducteur extérieur limitant la région (ou à défaut à l’infini):



$$\oint_{ext} \vec{E}_1 \, d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{tot} \quad ; \quad \oint_{ext} \vec{E}_2 \, d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{tot}$$

Regardons la différence $\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_3$:

$$\vec{\nabla} \vec{E}_3 = 0 \qquad \text{entre les conducteurs}$$

$$\oint \vec{E}_3 \, d\vec{a} = 0 \qquad \text{autour de chaque conducteur}$$

Le potentiel sur chaque conducteur est constant:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(V_3 \vec{E}_3 \right) = V_3 \underbrace{\left(\vec{\nabla} \vec{E}_3 \right)}_{=0} + \vec{E}_3 \underbrace{\left(\vec{\nabla} V_3 \right)}_{=-\vec{E}_3} = -E_3^2$$

Intégration sur toute la région entre les conducteurs:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \left(V_3 \vec{E}_3 \right) \, d\tau = \int_{\mathcal{S}} V_3 \vec{E}_3 \, d\vec{a} = -\int_{\mathcal{V}} E_3^2 \, d\tau$$

V_3 est constant sur toutes les surfaces (mais peut varier de surface en surface!):

$$V_3 \int_{\mathcal{S}} \vec{E}_3 \, d\vec{a} = 0 = -\int_{\mathcal{V}} E_3^2 \, d\tau \quad \rightarrow \quad E_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

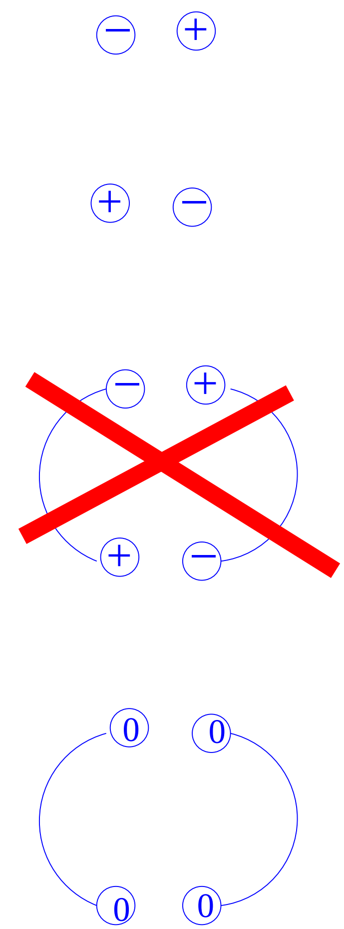
Est-ce trivial?

Est-il trivial que la charge totale sur les conducteurs spécifie d'une façon unique le champ autour?

Exemple du contraire: configuration de deux dipôles.

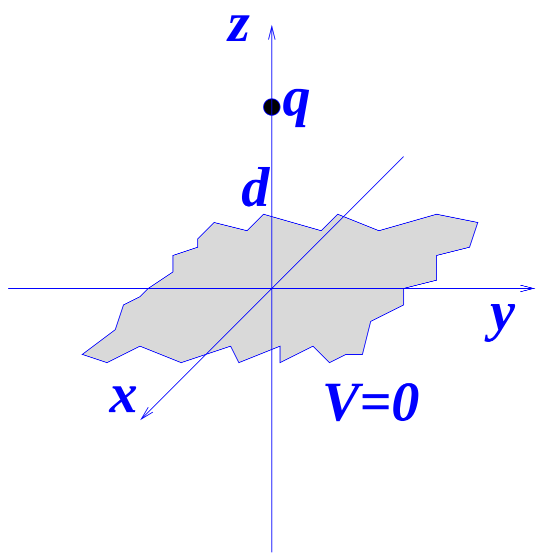
En court-circuitant les deux dipoles, on pouvait croire que les charges restent où elles sont, à cause de l'attraction entre les bouts des fils.

Ceci est faux. La charge totale des deux conducteurs est zéro, alors une configuration possible est de n'avoir aucune charge aux bouts des fils, correspondant à aucun champ électrique autour. Le théorème d'unicité nous dit que ceci est la seule configuration. La charge sera conduite par les fils jusqu'à neutralisation totale.



La méthode d'image

Supposons une charge $+q$ suspendue à une distance d d'une plaque conductrice infinie, connectée à la terre. Quel est le potentiel au dessus de la plaque? Le potentiel n'est pas juste $(1/4\pi\epsilon_0)q/\mathrm{r}$, parce que $+q$ induira des charges négatives sur la surface voisine. Le potentiel résultera de q et de la charge induite. Peut-on calculer ce potentiel en ignorant la charge induite?



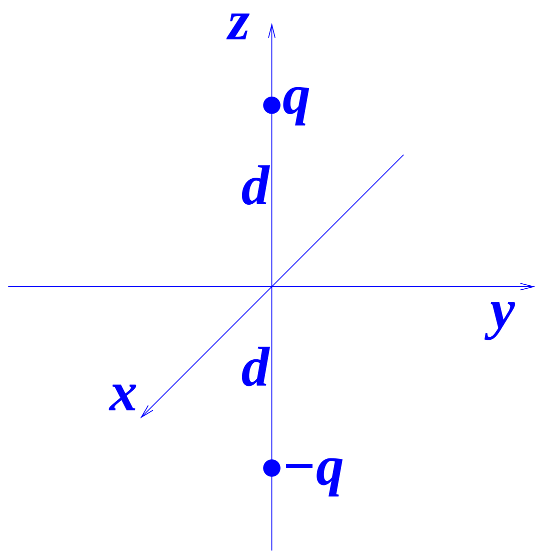
Il nous faut une solution à l'équation de Poisson dans la région $z > 0$, avec une seule charge q à $(0,0,d)$, et avec les conditions aux limites suivantes:

1. $V = 0$ à $z = 0$;
2. $V \to 0$ loin de la charge, c'est à dire pour $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$.

Le corollaire au premier théorème d'unicité garantit que il n'y a qu'une seule solution. Si par magie ou autres moyens nous pouvons découvrir une solution qui remplit les conditions, c'est la bonne.

Le problème d'image classique

Etudions un problème apparemment tout à fait différend:
Remplaçons la plaque par une charge $-q$ à $(0,0,-d)$.



Le potentiel de ce dipôle est:

$$V(x,y,z) = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]$$

Ce potentiel remplit les condition, il est donc en même temps la solution pour le problème initial pour $z > 0$.

Le potentiel pour $z < 0$ est evidemment différend du problème initial. Mais tant pis! Le théorème d'unicité garantit que nous avons trouvé la bonne solution dans la région visée.

Charge induite à la surface

Ayant déterminé le potentiel nous pouvons aussi calculer la charge induite à la surface:

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

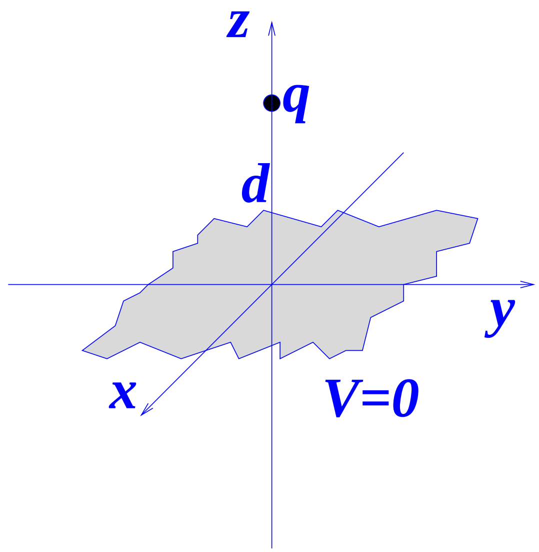
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{-q(z-d)}{\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{\left(x^2+y^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}\right\}$$

$$\sigma(x,y,0) = \frac{-qd}{2\pi\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}}$$

Evidemment, la charge induite est opposée à q, et la charge totale de la plaque est:

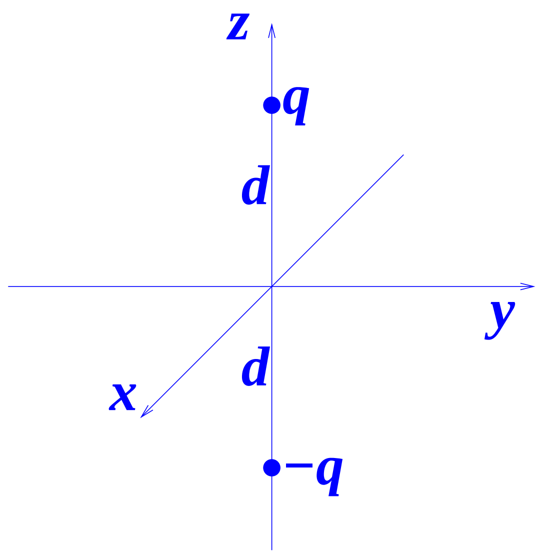
$$Q = \int \sigma \, da = -q$$

Force sur la charge



La charge q est attirée vers la plaque, à cause de la charge négative induite.

Calculons la force:



Si le potentiel autour de q est le même dans le vrai problème que dans la construction d'image, la force doit être la même aussi:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d^2}\hat{\vec{z}}$$

Energie du système

Mais tout n'est pas indentique! Exemple: l'énergie du système.

Pour deux charges on a:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2d}$$

Mais pour la charge au dessus de la plaque on a la moité de cela:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d}$$

parce que toute l'hémisphère $z < 0$ ne contribue pas.

Calcul de l'énergie dépensée pour introduire la charge q:

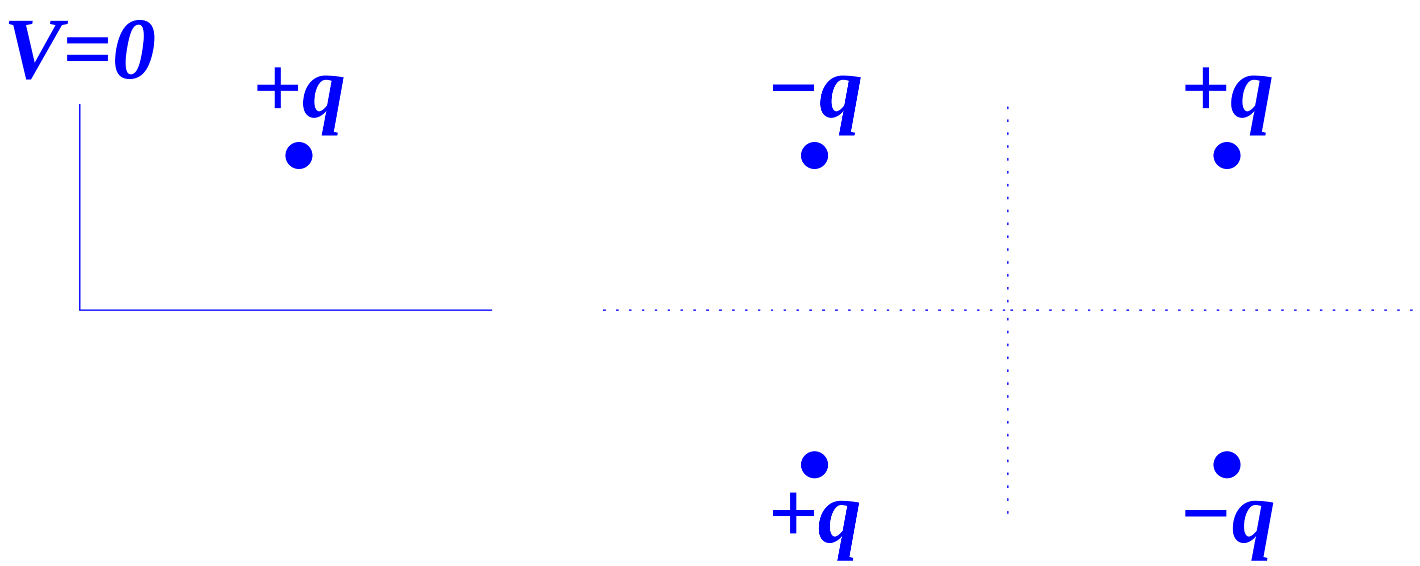
$$\begin{aligned} W &= \int_\infty^d \vec{F}\, d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^d \frac{q^2}{4z^2}\, dz \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{q^2}{4z}\right)\Bigg|_\infty^d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d} \end{aligned}$$

Ce travail est uniquement dépensé en approchant une seule charge.

Un autre problème d'image

Toute configuration de charges stationnaire près d'une surface reliée à la terre peut être traitée avec la méthode d'image. Mais attention: on ne peut pas mettre des charges images dans la région où l'on veut calculer le potentiel!

Exemple: une charge dans un "coin".



Un problème d'image exotique

Exemple plus exotique: une charge à l'extérieur d'une sphère.

Une charge ponctuelle q est située à une distance a du centre d'une sphère conductrice de rayon R, reliée à la terre. Trouver le potentiel autour de la sphère.

Examinons une configuration contenant une charge q et une charge "miroir":

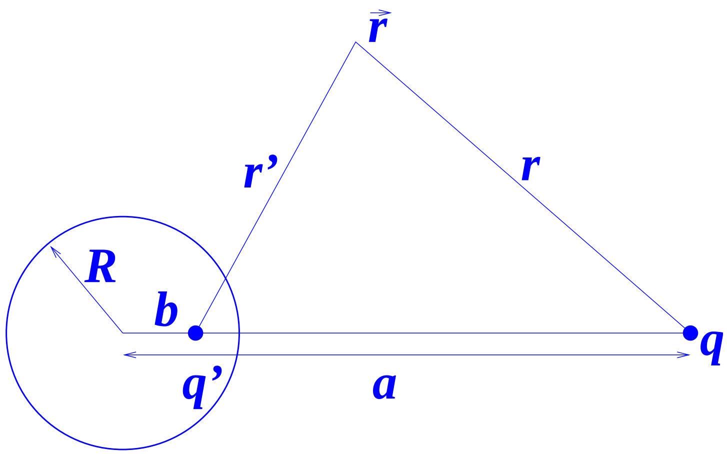
$$q' = -\frac{R}{a} q$$

placé à une distance b:

$$b = \frac{R^2}{a}$$

du centre de la sphère, vers la charge q.
Le potentiel de cette configuration est:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\mathrm{r}} + \frac{q'}{\mathrm{r}'}\right)$$



Par chance, ce potentiel est zéro partout sur la surface de la sphère.

Rappel: théorèmes d'unicité

Loi de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

Cas spécial, loi de Laplace, valable où densité de charge locale est zéro:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Premièr théorème d'unicité:

– La solution de l'équation de Laplace dans un volume $\mathcal{V}$ est déterminée d'une manière unique par les valeurs de V sur la surface $\mathcal{S}$ limitant le volume.

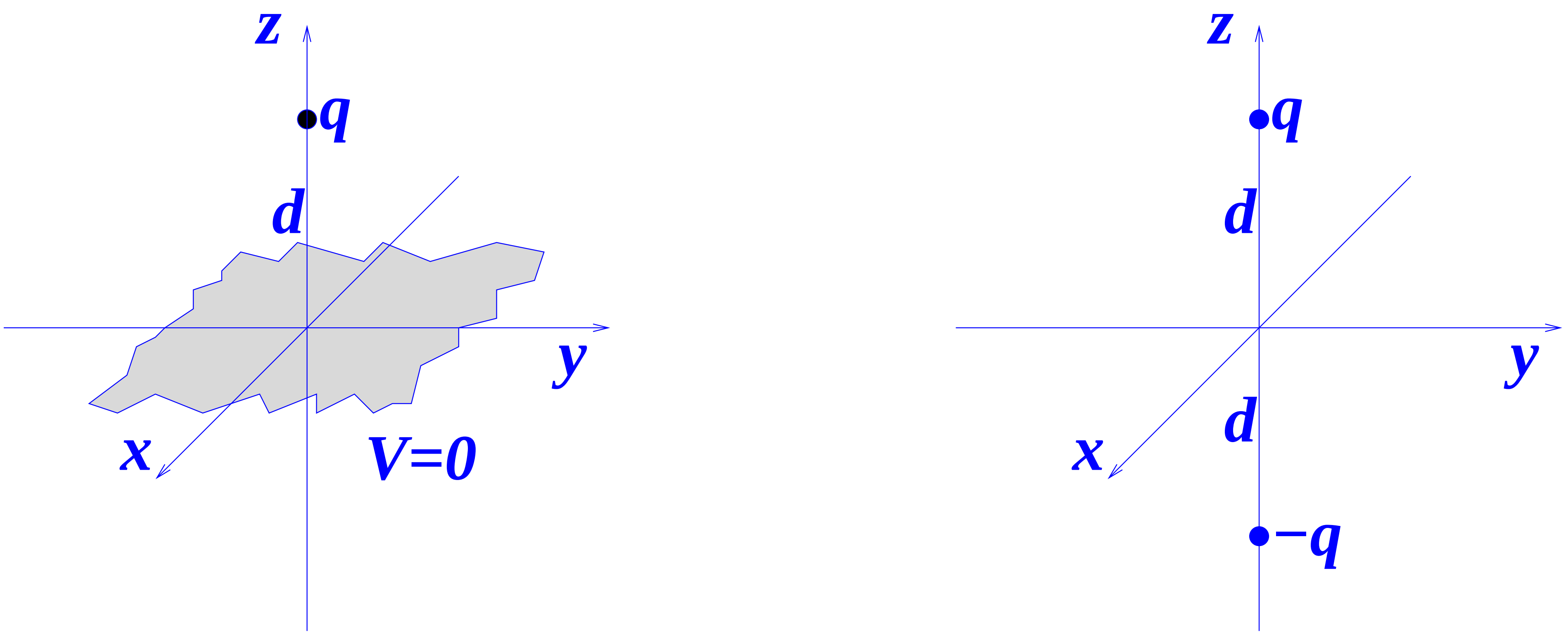
Deuxième théorème d'unicité:

– Dans un volume $\mathcal{V}$ entouré de conducteurs et qui contient une densité de charges spécifiée partout, le champ électrique est déterminé d'une façon unique si la charge totale de chaque conducteur dans le volume est connue.

Rappel: la méthode d'image

Quand on veut calculer le potentiel d'une distribution de charges près de plans équipotentiels, on peut sumuler les équipotentielles par des charges images additionnelles qui créent des équipotentielles virtuels. Par les théorèmes d'unicité on sait que le potentiel hors du volume qui contient les charge images est le même que celui du problème original.

Exemple classique:



Rappel: un problème d'image exotique

Exemple plus exotique: une charge à l'extérieur d'une sphère.

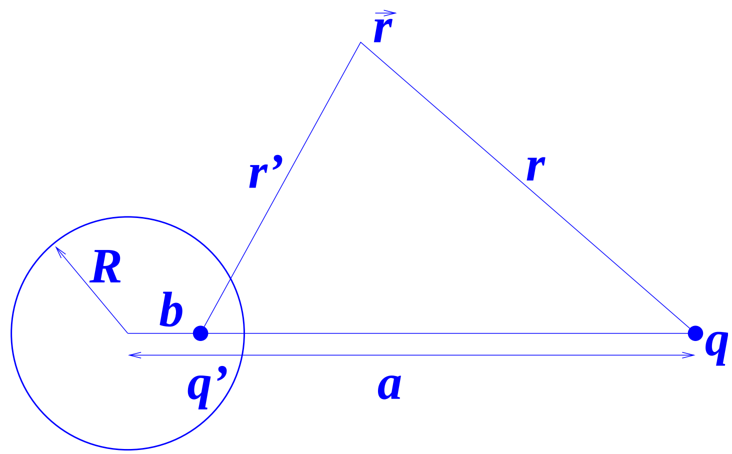
Une charge ponctuelle q est située à une distance a du centre d'une sphère conductrice de rayon R, reliée à la terre. Trouver le potentiel autour de la sphère.

Examinons une configuration contenant la charge q et une charge "miroir":

$$q' = -\frac{R}{a}q$$

placé à une distance b:

$$b = \frac{R^2}{a}$$



du centre de la sphère, vers la charge q.
Le potentiel de cette configuration est:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\mathrm{r}} + \frac{q'}{\mathrm{r}'}\right)$$

Par chance, ce potentiel est zéro partout sur la surface de la sphère. Attention: il est évidemment différent à l'intérieur de la sphère.

Astuces: séparation des variables

La séparation des variables est la méthode préférée du physicien pour résoudre les équations différentielles à dérivées partielles.

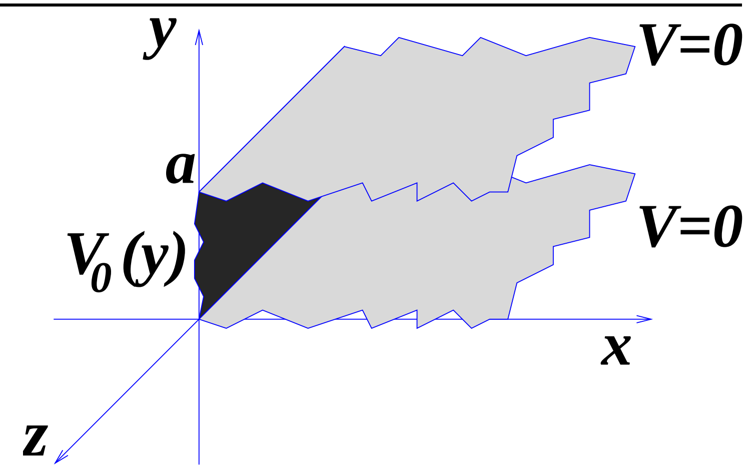
Elle s'applique à l'équation de Laplace quand le potentiel V ou la densité de charge σ sont specifiés aux bords d'une région, et quand on veut calculer le potentiel à l'intérieur de cette même région.

Stratégie: chercher une solution qui est le produit de fonctions qui ne dépendent que d'une seule coordonnée à la fois.

On va développer ce concept à partir d'une série d'exemples, en coordonnées cartésiennes et sphériques.

Coordonnées cartésiennes: plans parallèles

Deux plaques métalliques parallèles au plan xz, s'étendent vers $x \to +\infty$, $z \to \pm\infty$. L'une est situé à $y = 0$, l'autre à $y = a$, elles sont mises à la terre. Le système est clos à $x = 0$ par une bande isolante maintenue à un potentiel $V_0(y)$. Calculer le potentiel entre les deux plaques.



Configuration est indépendante de z, équation de Laplace et conditions:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

– $V = 0$ pour $y = 0$ et pour $y = a$

– $V = V_0(y)$ pour $x = 0$

– $V = 0$ pour $x \to \infty$, i.e. loin de la bande “chaude”

Ansatz:

$$V(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Ceci a l'air d'une fonction très spéciale (ce qui est vrai), mais elle permet de construire la solution générale.

Coordonnées cartésiennes: plans parallèles

Equation de Laplace avec cet Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0 \\ V(x,y) &= X(x) \cdot Y(y) \\ Y\frac{d^2 X}{dx^2} + X\frac{d^2 Y}{dy^2} &= 0 \end{aligned}$$

Division par V sépare les variables:

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2}}_{g(y)} = 0$$

Une seule solution: $f(x) = C_1 =$const, $g(y) = C_2 =$const:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = C_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = C_2 \quad \text{avec} \quad C_1 + C_2 = 0$$

Une seule équation différentielle à dérivées partielles est séparée en deux équations différentielles ordinaires.

Coordonnées cartésiennes: plans parallèles

Mettons $C_1 = k^2 > 0$ et $C_2 = -k^2 < 0$ (justifié plus tard):

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2 X \qquad ; \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 Y$$

Solutions:

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} \qquad ; \qquad Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$$

$$V(x,y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right)(C \sin ky + D \cos ky)$$

Conditions aux extrèmes:

$$V = 0 \text{ pour } x \to \infty \quad \to \quad A = 0$$

Absorbant B en C et D:

$$V(x,y) = e^{-kx}(C \sin ky + D \cos ky)$$

$$V = 0 \text{ pour } y = 0 \quad \to \quad D = 0$$

$$V = 0 \text{ pour } y = a \quad \to \quad \sin ka = 0 \quad \to \quad k = \frac{n\pi}{a} \; (n = 1,2,3,\ldots)$$

Problème restant: accomoder $V = V_0(y)$ pour $x = 0$.

Coordonnées cartésiennes: plans parallèles

Série de solutions, qui obéissent toute condition sauf $V = V_0(y)$ pour $x = 0$:

$$V(x,y) = Ce^{-kx}\sin ky \quad \text{avec} \quad k = \frac{n\pi}{a}\ (n = 1,2,3,\ldots)$$

Equation de Laplace est linéaire:

$$\nabla^2 V = \alpha_1 \nabla^2 V_1 + \alpha_2 \nabla^2 V_2 + \cdots = 0$$

Solutions séparables servent à construire une solution générale:

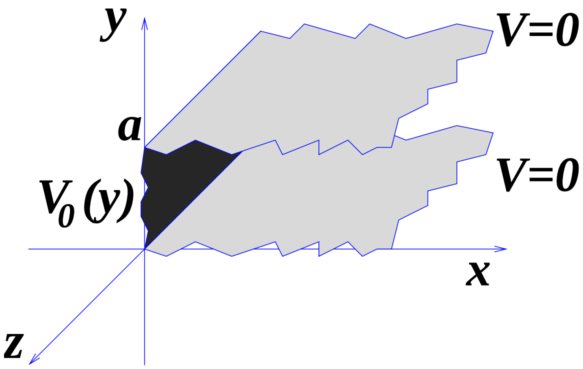
$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)$$
$$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi y/a) = V_0(y)$$

Ceci est une série de Fourrier. Théorème de Dirichlet garantit que (pratiquement) n'importe quelle fonction $V_0(y)$ peut être écrite de cette façon.

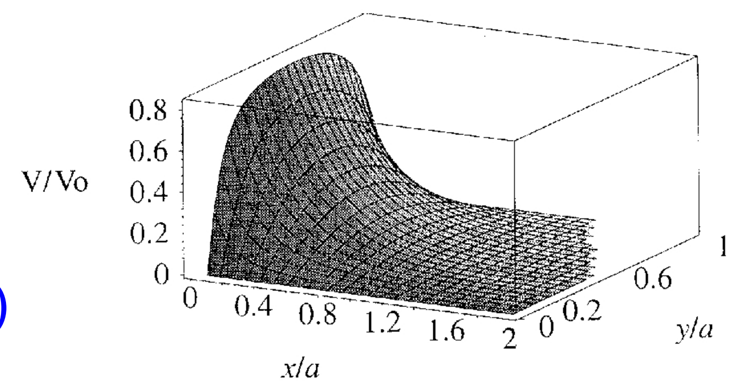
Détermination des coefficients (voir compléments de mathématique):

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} V_0(y)\sin(n\pi y/a)\,dy$$

Plans parallèles: exemple avec potentiel constant



Exemple concret: $V_0(y) = V_0 =$ const. entre les deux plaques.

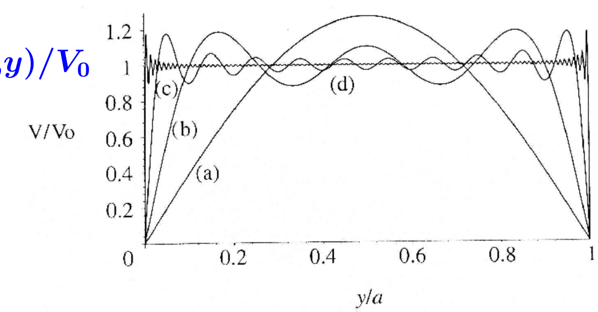


Détermination des coefficients:

$$C_n = \frac{2V_0}{a}\int_0^a \sin\left(n\pi y/a\right)\,dy$$

$$= \frac{2V_0}{na}\left(1-\cos n\pi\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ pair} \\ \frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n}e^{-n\pi x/a}\sin\left(n\pi y/a\right)$$



La série peut (par chance) être sommée explicitement:

$$V(x,y) = \frac{2V_0}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(n\pi y/a\right)}{\sinh\left(n\pi y/a\right)}\right)$$

Griffith, fig. 3.18 et 3.19, page 131

Généralisation

Le succès de la méthode de séparation dépend de deux propriétés des solutions, e.g. $V(x,y) = C\exp(-kx)\sin ky$: elles sont complètes et orthogonales.

Un groupe de fonctions est dit complet si toute autre fonction peut être exprimée comme une combinaison linéaire:

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(y)$$

Les fonctions $\sin(n\pi y/a)$ sont complètes sur l'intervalle $0 \leq y \leq a$.

Un groupe de fonctions est dit orthogonal si le produit scalaire de deux membres différents est zéro:

$$\int_0^a f_n(y) f'_n(y)\, dy = 0 \quad \text{pour } n' \neq n$$

Les fonctions $\sin(n\pi y/a)$ sont orthogonales sur l'intervalle $0 \leq y \leq a$:

$$\int_0^a \sin(n\pi y/a)\sin(n'\pi y/a) = \begin{cases} 0, & \text{pour } n' \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{pour } n' = n \end{cases}$$

Le physicien a tendance à laisser la preuve de ces deux propriétés aux mathématiciens.

Coordonnées sphériques

Equation de Laplace en coordonnées sphériques:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \;=\; 0$$

Si le système a une symmétrie azimuthale, V est indépendant de ϕ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) \;=\; 0$$

Ansatz avec séparation des variables:

$$V(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta) \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

Comme le premier terme dépend uniquement de r et le deuxième uniquement de θ, les deux doivent être constant:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = l(l+1) \qquad ; \qquad \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -l(l+1)$$

Coordonnées sphériques

Solution de l'équation radiale:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = l(l+1)R \quad \longrightarrow \quad R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}$$

La solution générale de l'équation angulaire sont les polynomes de Legendre:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -l(l+1)\sin\theta\,\Theta \quad \longrightarrow \quad \Theta(\theta) = P_l(\cos\theta)$$

Polynomes de Legendre:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l$$

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 & ; \quad P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= (3x^2-1)/2 & ; \quad P_3(x) &= (5x^3-3x)/2 \\
P_4(x) &= (35x^4-30x^2+3)/8 & ; \quad P_5(x) &= (63x^5-70x^3+15x)/8
\end{aligned}$$

$$\cdots$$

Solution générale séparable:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

Exemple 1: coordonnées sphériques

Le potentiel $V_0(\theta)$ est specifié sur une surface sphérique de rayon R. Trouver le potentiel à l'intérieur de la sphère.

Solution:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Pour que le potentiel soit fini à l'origine, il faut que $B_l = 0$ pour tout l:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

A $r = R$ on doit retrouver le potentiel V_0:

$$V(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_0(\theta)$$

Comme les polynomes de Legendre sont complets sur l'intervalle $-1 \le x \le 1$, i.e. $0 \le \theta \le \pi$, la solution existe pour tout V_0. L'orthogonalité nous dit que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx &= \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{pour } l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1} & \text{pour } l' = l \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 1: coordonnées sphériques

Détermination des coefficients:

$$\int_0^\pi \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) \cdot P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta = \int_0^\pi V_0(\theta) \cdot P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta$$

$$A_l R^l \frac{2}{2l+1} = \int_0^\pi V_0(\theta) \cdot P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta$$

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V_0(\theta) \cdot P_l(\cos\theta) \sin\theta \; d\theta$$

Exemple concret pour V_0:

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= k \sin^2\theta/2 \\ &= \frac{k}{2}(1-\cos\theta) = \frac{k}{2}\left[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)\right] \end{aligned}$$

$$V(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \frac{k}{2}\left[P_0(\cos\theta) - P_1(\cos\theta)\right]$$

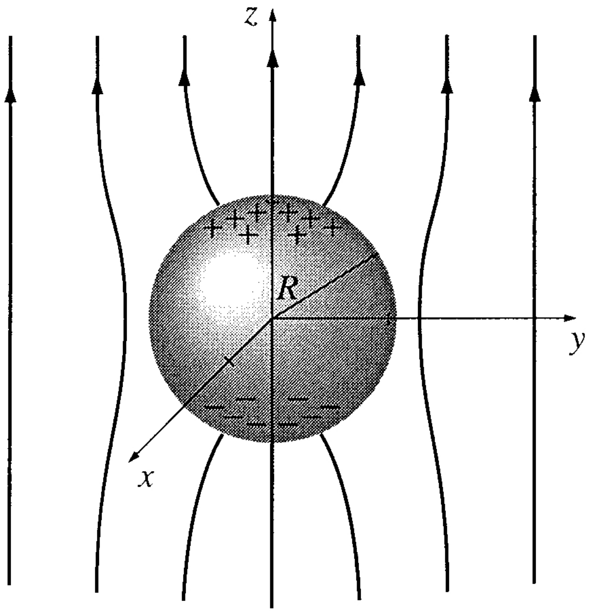
Il en suit que $A_0 = k/2$, $A_1 = -k/(2R)$ et $A_k = 0$ pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \frac{k}{2}\left[r^0 P_0(\cos\theta) - \frac{r^1}{R} P_1(\cos\theta\right] \\ &= \frac{k}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

Exemple 2: sphère conductrice

Une sphère conductrice non chargée est placée dans un champ homogène $\vec{E} = E_0\hat{\vec{z}}$. La charge induite transformera ce champ. Trouver le potentiel autour de la sphère.

Griffith, fig. 3.24, page 141



Solution:
La sphère étant une équipotentielle, nous pouvons définir $V(R) = 0$, et par symétrie, $V(x,y,0) = 0$. A cause de la définition du zéro du potentiel, il ne disparait pas pour $|z| \to \infty$. Mais le champ extérieur n'est pas perturbé loin de la boule:

$$V \to -E_0 z + C \overset{V(z=0)=0}{\longrightarrow} -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

Les conditions aux limites sont:

– $V = 0$ pour $r = R$

– $V \to -E_0 r\cos\theta$ pour $r \gg R$

Exemple 2: sphère conductrice

Solution générale:

$$V(r,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Première condition:

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad B_l = -A_l R^{2l+1}$$

$$V(r,\theta) \;=\; \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Pour $r \gg R$, le deuxième terme est négligeable:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) \;=\; -E_0 r \cos\theta$$

Avec $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ on trouve $A_1 = -E_0$ et tout autre $A_k = 0$:

$$V(r,\theta) \;=\; -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos\theta$$

Premier terme dû au champ extérieur, deuxième à la charge induite:

$$\sigma(\theta) \;=\; -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 E_0 \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3} \right) \cos\theta \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

Maxima sur les “pôles” $\oplus$ dessus et $\ominus$ dessous.

Potentiels approximatifs à grandes distances

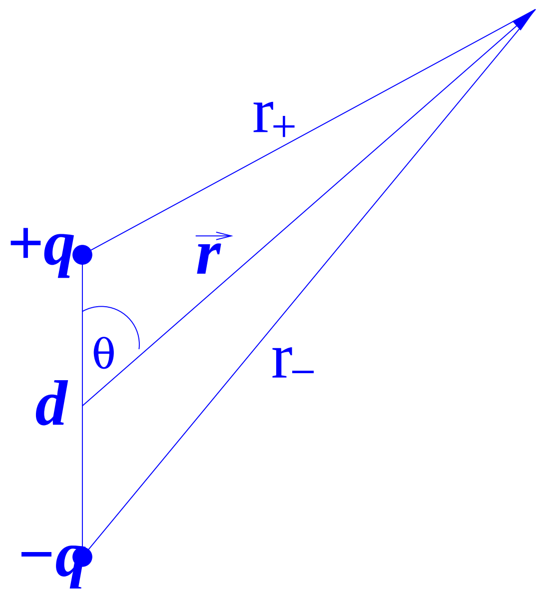
A une grande distance comparée à sa taille, chaque distribution de charges ressemble à une charge ponctuelle, et son potentiel tend vers:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

où Q est la charge totale.

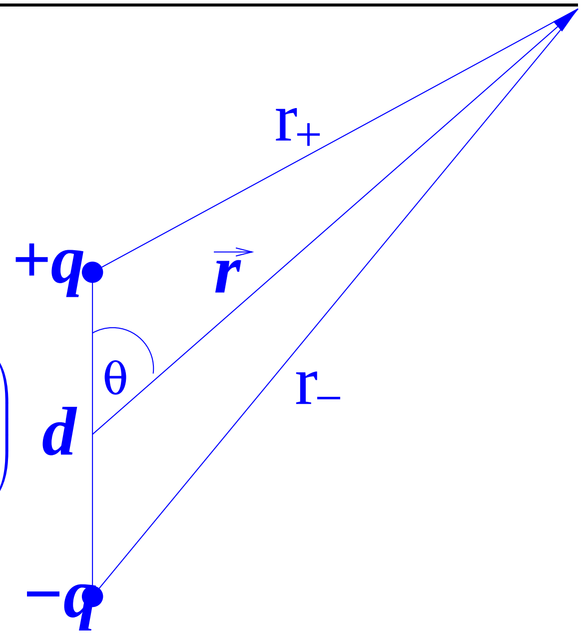
Comment se fait la transition entre le potentiel à proximité, où les détails de la distribution sont importants et ce comportement asymptotique?

Exemple: dipôle électrostatique



Potentiels approximatifs à grandes distances

Exemple: dipôle électrostatique



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\mathrm{r}_+} - \frac{q}{\mathrm{r}_-}\right)$$

$$\mathrm{r}_\pm^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp r d\cos\theta = r^2\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{4r^2}\right)$$

A grande distance $r \gg d$, en expansion binomiale:

$$\frac{1}{\mathrm{r}_\pm} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}_+} - \frac{1}{\mathrm{r}_-} \simeq \frac{d}{r^2}\cos\theta$$

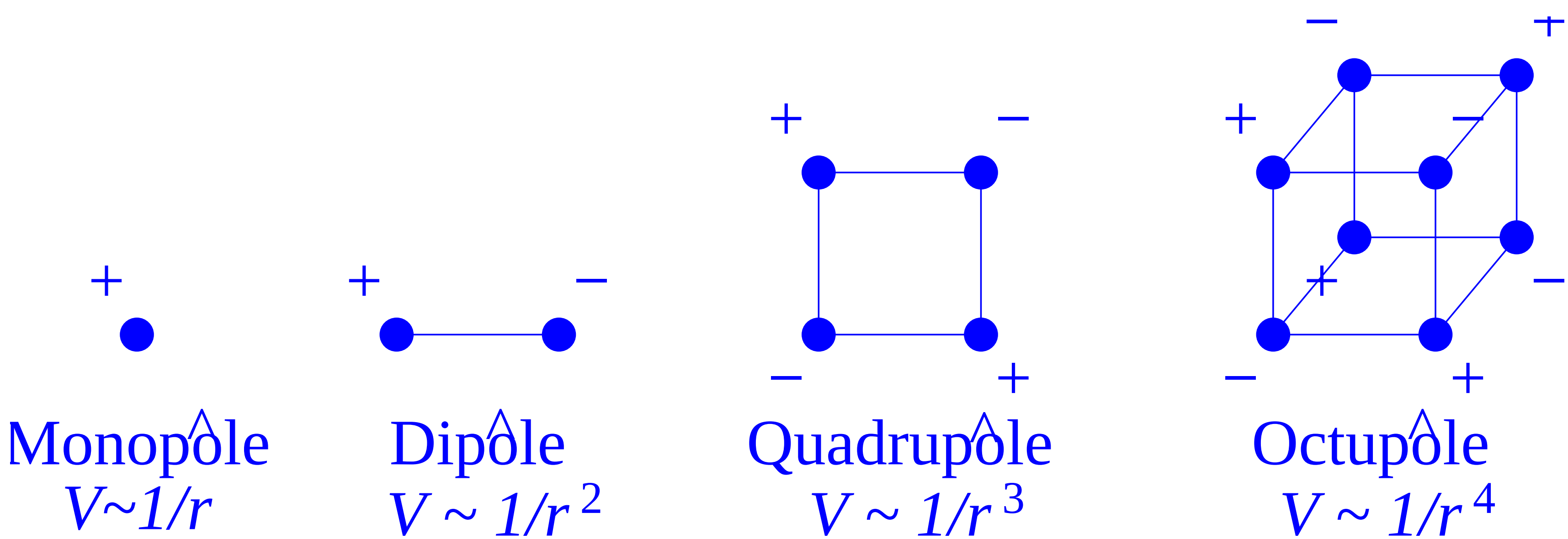
Solution:

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

Expansion en multipôles

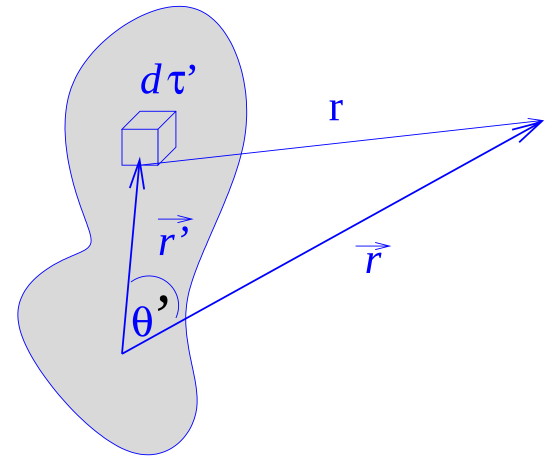
Potentiel d'un dipôle diminue comme $1/r^2$, plus rapidement que celui d'une charge ponctuelle, un monopôle.

Pour une paire de dipôles égaux et opposés, un quadrupôle, on a $1/r^3$, et pour un octupôle $1/r^4$.



Expansion en multipôles

Généralisation: expansion systématique du potentiel d'une distribution de charges, en puissances de $1/r$.



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{\mathrm{r}} q(\vec{r}') \, d\tau'$$

Distance du volume $d\tau'$:

$$\mathrm{r}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta' = r^2\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta'\right]$$

peut s'ecrire comme:

$$\mathrm{r} = r\sqrt{1+\epsilon} \qquad \text{avec} \qquad \epsilon \equiv \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)$$

Pour des points bien à l'extérieur de la distribution de charge, $\epsilon \ll 1$, et l'expansion binomiale s'impose:

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{r}(1+\epsilon)^{1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \frac{5}{16}\epsilon^3 + \ldots\right)$$

Expansion en multipôles

Reécrit en termes de r, r' et θ':

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbf{r}} &= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta'\right)^2 + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{r}\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)(\cos\theta') + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 (3\cos^2\theta' - 1)/2 + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 (5\cos^3\theta' - 3\cos\theta')/2 + \ldots\right]\end{aligned}$$

On reconnaît les polynomes de Legendre comme coefficients:

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

r est une constante pour l'intégration:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int r'^n P_n(\cos\theta')\rho(\vec{r}')\, d\tau'$$

Le premier terme est la contribution du monopôle, le deuxième celle du dipôle, le troisième celle du quadrupôle etc.

L'expansion est exacte mais sert aussi comme préscription pour une approximation: le premier terme non-zéro sert comme première approximation, autres termes pour raffiner le calcul.

Les termes monopôles et dipôles

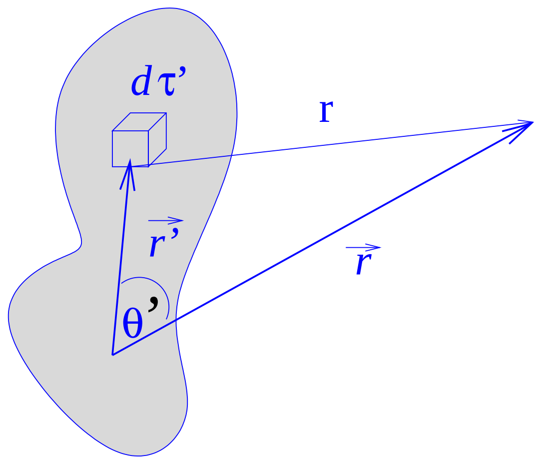
Souvent l'expansion est dominée (à large r) par le terme monopôle:

$$V_{mon}(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

où $Q \;=\; \int \rho \;\, d\tau$ est la charge totale. En effet pour une charge ponctuelle à l'origine, $\rho = Q\delta^3(\vec{r})$, tous les autres termes disparaissent.

Si la charge totale est zéro, le deuxième terme dominera vraisemblablement:

$$V_{dip}(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\int r' \cos\theta' \rho(\vec{r}\,') \; d\tau'$$



θ' est l'angle entre $\vec{r}\,'$ et $\vec{r}$: $\quad r' \cos\theta' = \hat{\vec{r}} \cdot \vec{r}\,'$

$$V_{dip}(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\vec{r}} \int \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \; d\tau'$$

Le terme dipolaire

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\vec{r}} \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\, d\tau'$$

L'intégrale est indépendante de $\vec{r}$ et définit le moment dipolaire de la distribution:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{r}}}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\, d\tau'$$

Le moment dipolaire est un vecteur, défini par la géométrie de la distribution.

Collection de charges ponctuelles:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \vec{r}'$$

Dipôle physique:

$$\vec{p} = q\vec{r}'_+ - q\vec{r}'_- = q\left(\vec{r}'_+ - \vec{r}'_-\right) = q\vec{d}$$

Ceci est une (bonne) approximation de notre résultat obtenu avant. Il est le potentiel exact pour le dipôle pur, qui est caractérisé par les limites simultanées $d \to 0$, $q \to \infty$, avec $dq =$const.

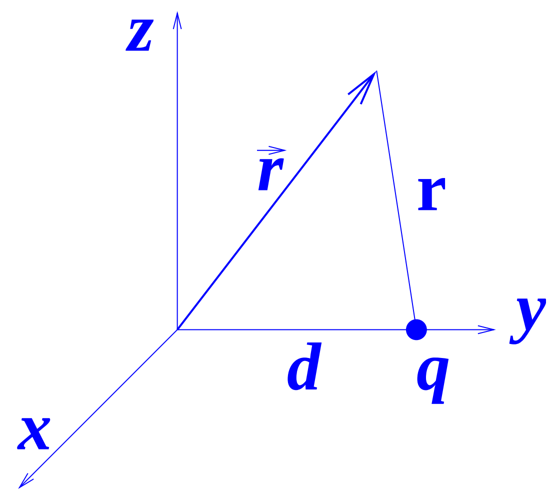
Origine des coordonnées

L'expansion en multipôles n'est pas indépendante de la position de l'origine.

Monopôle:

Une seule charge à l'origine est un pur monopôle. En déplacant l'origine par une distance d le long y, on crée d'autres termes, entre autres un moment dipolaire:

$$\vec{p} = qd\,\hat{\vec{y}}$$



Dipôle:

Une transformation des coordonnées, $\vec{r} \longrightarrow \vec{s} = \vec{r} - \vec{a}$ transforme le moment dipolaire $\vec{p} \longrightarrow \vec{q}$:

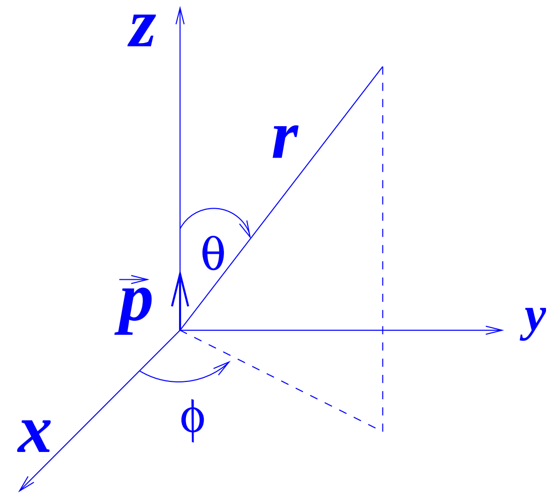
$$\begin{aligned}\vec{q} &= \int \vec{s}'\rho(\vec{r}')\,d\tau' = \int (\vec{r}' - \vec{a})\,\rho(\vec{r}')\,d\tau' \\ &= \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,d\tau' - \vec{a}\int \rho(\vec{r}')\,d\tau' = \vec{p} - Q\vec{a}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\vec{p} = \vec{q}$ uniquement si $Q = 0$.

Champ électrique d'un dipôle

Choisissons les coordonnées de sorte que $\vec{p}$ se situe à l'origine et pointe dans la direction z:

$$V_{dip}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{r}}}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

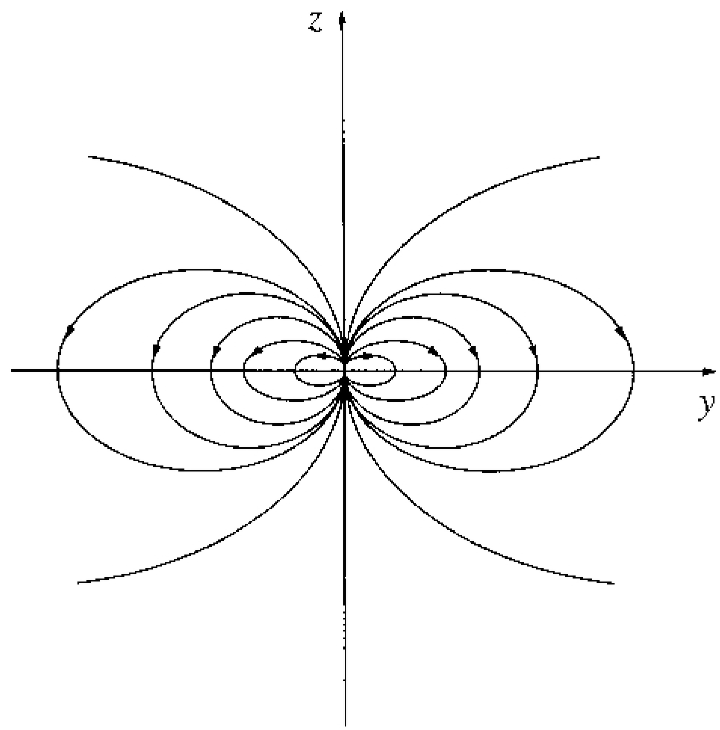


Le champ est donné par le gradient négatif du potentiel:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$



Le champ pour cette configuration, $\vec{p} = (0,0,p)$, en coordonnées sphériques:

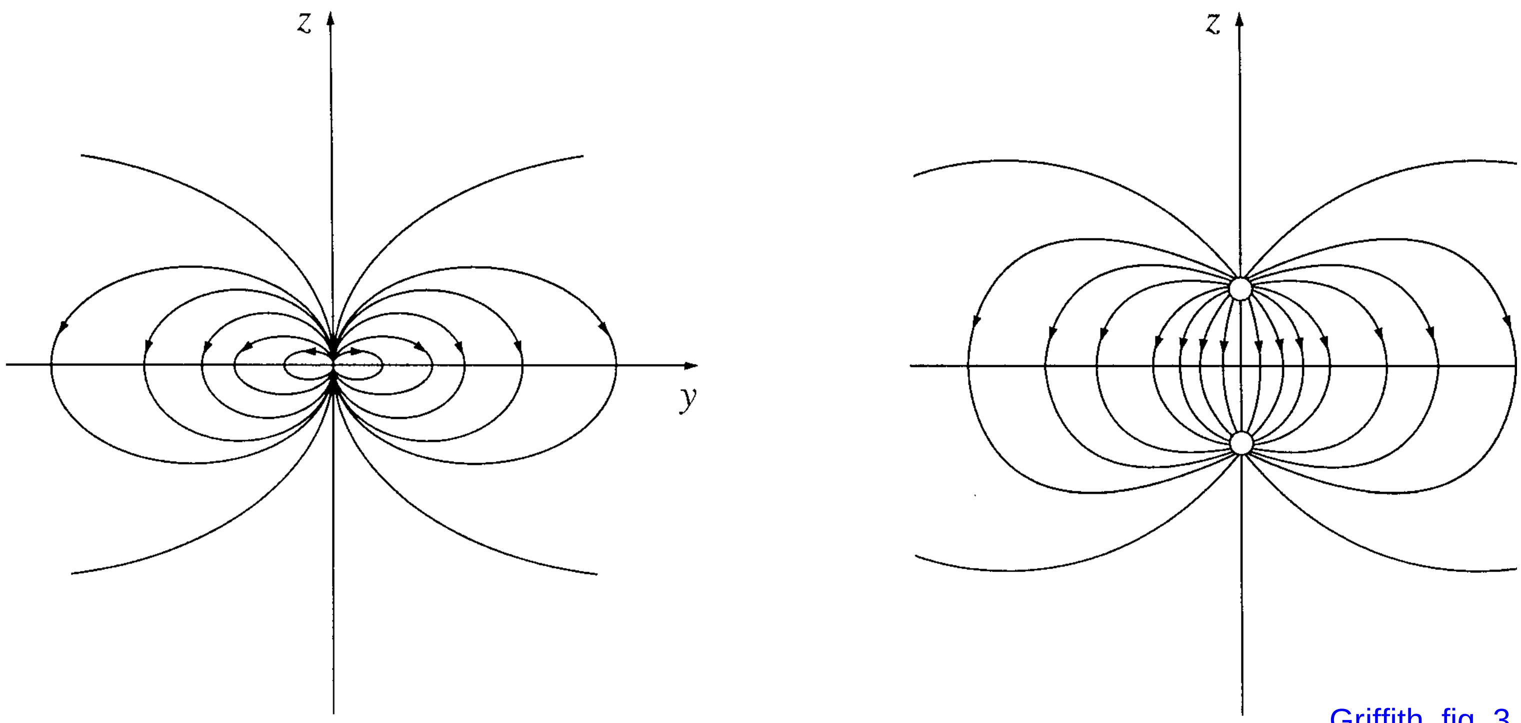
$$\vec{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{\vec{r}} + \sin\theta\hat{\vec{\theta}}\right)$$

Griffith, fig. 3.37, page 154

Champ électrique d'un dipôle

– Champ du monopôle diminue comme $1/r^2$, celui du dipôle comme $1/r^3$, celui du quadrupôle comme $1/r^4$ etc., avec une puissance de r de plus que les potentiels respectifs.

– Champ du dipôle pur diffère de celui du dipôle physique à des distances comparable à la taille d de ce dernier.



Griffith, fig. 3.37, page 154

Rappel: séparation des variables

Coordonnées cartésiennes, dispositif symmétrique le long z, plan $V_0(y)$ définit conditions de bord:

$$V(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

Solution séparable, série de Fourrier:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)$$
$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^{\infty} V_0(y) \sin(n\pi y/a)\, dy$$

Coordonnées sphériques, symmétrie azimuthale:

$$V(r,\theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$$

Solution générale séparable avec polynomes de Legendre:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Coëfficients A_l et B_l définis par les conditions de bord.

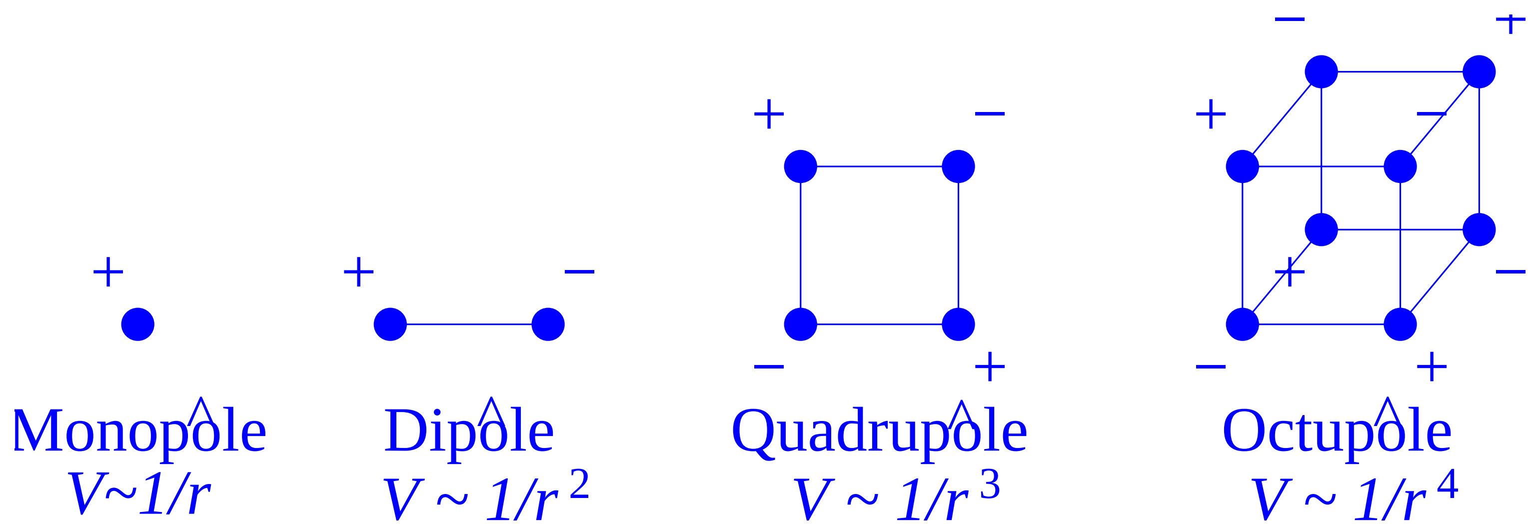
Rappel: expansion en multipôles

Potentiel reécrit comme somme de termes multipolaires:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r'^n P_n(\cos\theta') \rho(\vec{r}') \, d\tau'$$

Le premier terme est la contribution du monopôle, le deuxième celle du dipôle, le troisième celle du quadrupôle etc.

Multipôles pures:



La décomposition du potentiel en termes multipolaires est exacte dans la mesure que la somme porte sur toutes les termes, $n \rightarrow \infty$. Elle est approximative quand on termine la somme après un des premiers termes non-nuls.

Rappel: termes monopôles et dipôles

Souvent l'expansion est dominée (à large r) par le terme monopôle:

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

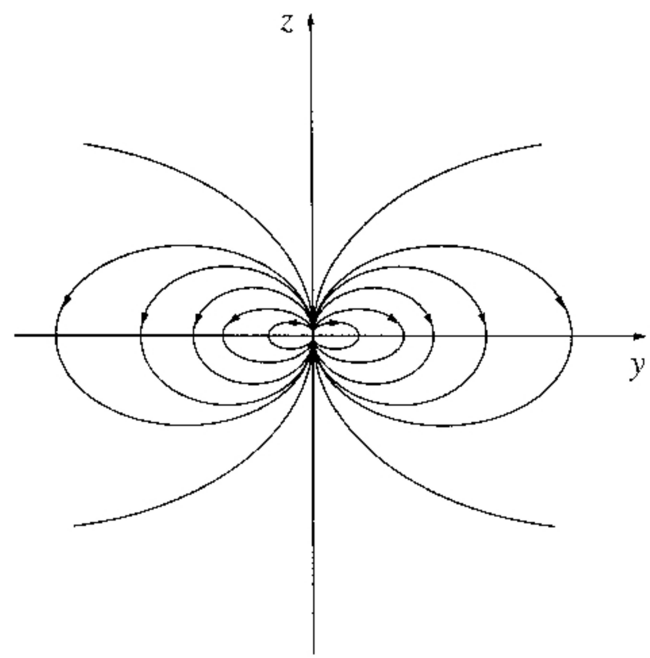
où $Q = \int \rho \, d\tau$ est la charge totale.

Si la charge totale est zéro, le deuxième terme dominera vraisemblablement:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{r}}}{r^2} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') \, d\tau'$$

Le moment dipolaire $\vec{p}$ est un vecteur, défini par la géométrie de la distribution. Collection de charges ponctuelles:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \vec{r}'$$



Griffith, fig. 3.37, page 154

Champs électriques dans les milieux pondérés

Rappel: Conducteurs:

– Charges se déplacent avec une certaine liberté,
– Ressource “infinie” de charges, un ou deux par atome
– Métaux: électrons se déplacent d’un atome à l’autre
– Gaz et liquides: ions sont mobiles
– Une certaine résistance s’oppose au déplacement des charges, sauf pour les supraconducteurs

Isolants = matériaux diélectriques:

– Electrons sont fortement liés à leurs atomes/molécules, neutralité locale

Que se passe-t-il quand un tel atome/molécule est exposé à un champ électrique extérieur?

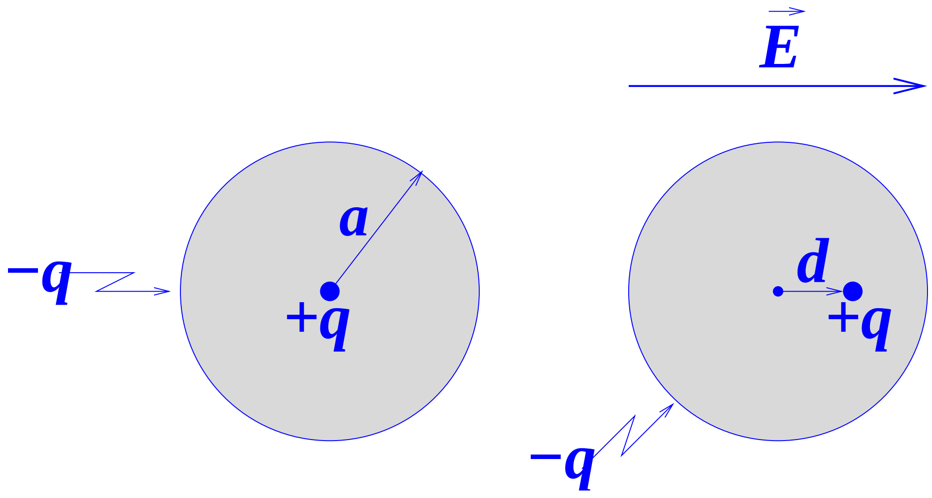
Dipôles induits

Modèle primitif d'un atome:

– noyau ponctuel de charge positive

– entouré d'un "nuage" sphérique d'électrons, homogènement chargé

– champ électrique extérieur déplace l'un par rapport à l'autre, polarisation atomique



– déplacement minuscule, même à l'échelle atomique

– moments dipolaires des atomes s'additionnent

– champ extérieur comparable à la force de liaison atomique: ionisation

Moment dipôlaire atomique donné par la polarisabilité atomique α :

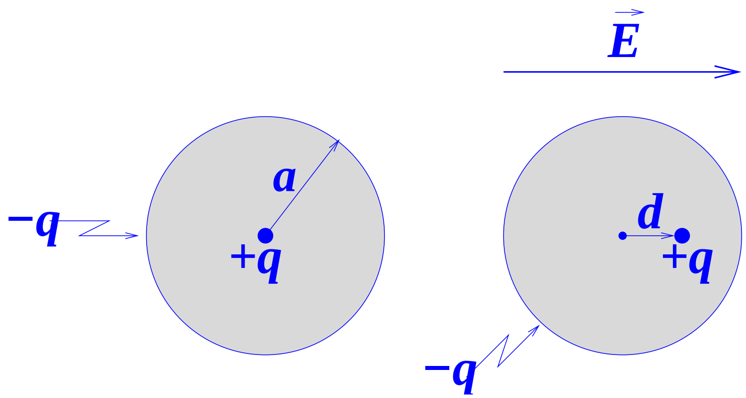
$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{ext}$$

Dipôles atomiques induits

Calcul de la polarisabilité selon notre modèle naïf:

Force dipolaire intérieure compense force extérieure:

$$
\begin{aligned}
E_{int} &= -E_{ext} \\
E_{int} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\int_0^d \rho \, d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\frac{-3q}{4\pi a^3}\frac{4}{3}\pi d^3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{a^3}
\end{aligned}
$$



Polarisabilité proportionnelle au volume atomique:

$$
E_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{a^3} \quad \longrightarrow \quad p = qd = \left(4\pi\epsilon_0 a^3\right) E_{ext} \quad \longrightarrow \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3
$$

Polarisabilités atomiques α expérimentales pour quelques éléments:

Elément	H	He	Li	Be	C	Na	Na	Ar	K	Cs
$\alpha/4\pi\epsilon_0$ [10^{-30}m^3]	0.667	0.205	24.3	5.60	1.76	0.396	24.1	1.64	43.4	59.6

Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press 1997

En accord qualitatif (à un facteur $\mathcal{O}(5)$ pres) avec notre modèle naif.

Dipôles moléculaires

– Molécules n'ont pas normalement une symmétrie sphérique.

– Polarisabilité dépend de l'angle du champ extérieur par rapport à l'axe de la molécule:

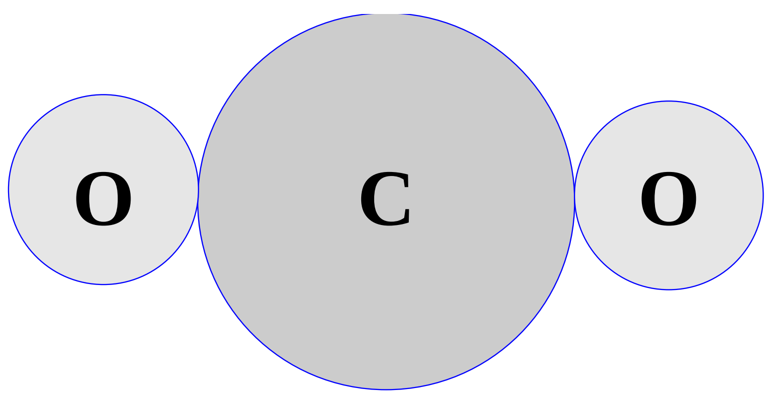
$$\vec{p} = \alpha_\perp \vec{E}_\perp + \alpha_{||}\vec{E}_{||}$$

– Exemple: molécule allongée CO_2

$$\alpha_{||} = 4.5 \times 10^{-42}\frac{\mathrm{C^2m}}{\mathrm{N}} \quad ; \quad \alpha_\perp = 2 \times 10^{-40}\frac{\mathrm{C^2m}}{\mathrm{N}}$$

– Direction de $\vec{p}$ n'est plus parallèle à $\vec{E}$

– Cas général: α est un tenseur



Alignement de dipôles moléculaires

– Molécules dit polaires ont un moment dipolaire permanent

– Exemple: H_2O, $p = 6.1 \times 10^{-30}$ Cm

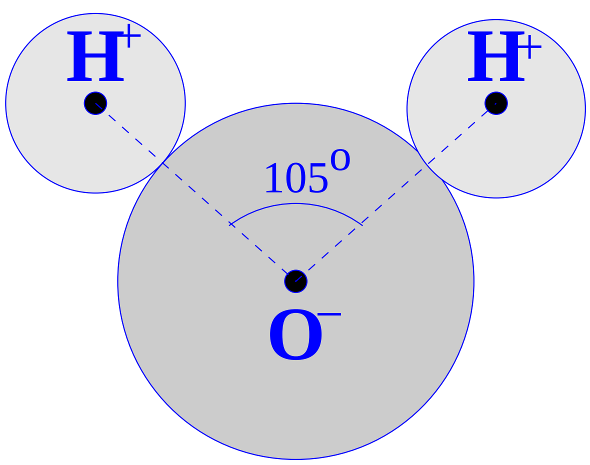
– Aucune force nette sur le dipôle dans un champ extérieur homogène:

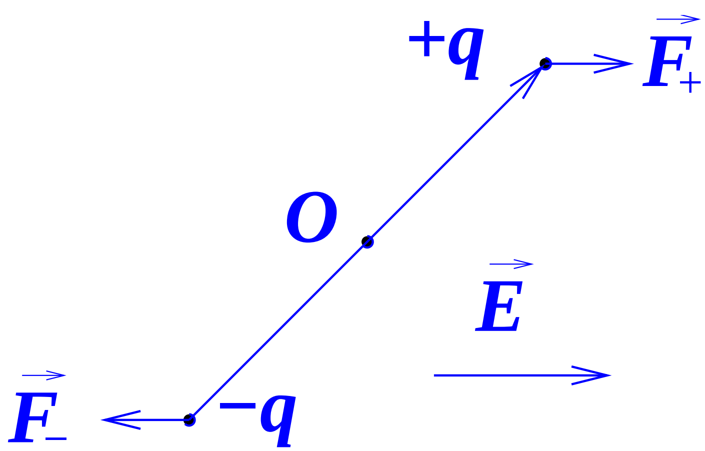
$$\vec{F}_+ = p\vec{E} \quad ; \quad \vec{F}_- = -p\vec{E}$$

– Un moment de force essaye d'aligner le dipôle avec le champ extérieur:

$$\vec{N} = \left(\vec{r}_+ \times \vec{F}_+\right) + \left(\vec{r}_- \times \vec{F}_-\right) = \left[\frac{\vec{d}}{2} \times (q\vec{E})\right] + \left[\frac{-\vec{d}}{2} \times (-q\vec{E})\right] = q\vec{d} \times \vec{E}$$

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$$





Forces d'un champ inhomogène

Moment de force pour un dipôle pur par rapport à son centre, même dans un champ inhomogène:

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Force additionelle, à cause de $\vec{F}_+ \neq -\vec{F}_-$:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = q\left(\Delta\vec{E}\right)$$

Petites variations dans le champ:

$$\Delta E_x = \left(\vec{\nabla} E_x\right)\vec{d} \;\; ; \quad \Delta E_y = \left(\vec{\nabla} E_y\right)\vec{d} \;\; ; \quad \Delta E_z = \left(\vec{\nabla} E_z\right)\vec{d}$$

$$\Delta\vec{E} = \left(\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Force sur le dipôle:

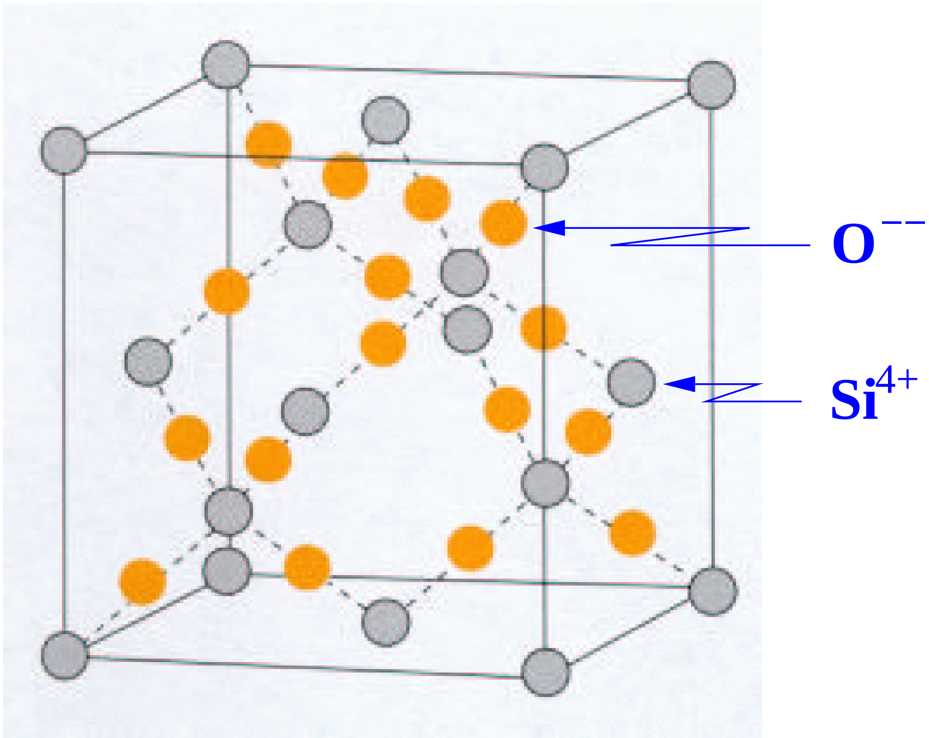
$$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$$

Effet piézoélectrique

Inversément, une force exercée sur un crystal asymmétrique – comme le quarz – peut causer un champ et une différence de potentiel:

$$\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{E}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{F_z}{p_z}$$



H. Hansel et W. Neumann, Physik: Molekule und Festkorper, Spektrum Verlag, 1996, p. 227

– Centre de gravité des ions négatives est déplacé par rapport aux charges positives.

– Une densité de charge nette, $\rho \propto \vec{\nabla}\vec{E}$, se forme sur la surface du crystal.

– Une différence en potentiel est créée, piézoélectricité.

Polarisation

– Atomes ou molécules non-polaires: moment dipôlaire induit, parallel au champ extérieur.
– Molécules polaires: moment de force aligne leur moment dipôlaire parallel au champ extérieur.
– Resultat dans les deux cas: beaucoup de petits dipôles, alignés avec le champ.
– L'agitation thermique en compétition, reduit l'alignement net, surtout à haute température.
– Pour certain matériaux l'effet, une fois induit par le champ extérieur, peut persister, surtout à basse température.
– Polarisation quantifie l'effet:

$$\vec{P} \equiv \text{densité du moment dipolaire}$$

Attention: ceci traite le moment dipolaire comme quantité continue.

– La polarisation du matériau cause elle-même un champ qui s'additionne au champ extérieur.
– Nous étudions d'abord l'effet de ce nouveau champ additionnel, dû à $\boldsymbol{P}$, et ensuite la cause de $\boldsymbol{P}$.

Champ d'un objet polarisé

Calculons le champ dû à la polarisation du milieu, décomposé en dipôles élémentaires:

– Potentiel du dipôle individuel:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}} \cdot \vec{p}}{\mathrm{r}^2}$$

avec le vecteur $\vec{\mathrm{r}}$ qui pointe du dipôle jusqu'au point d'observation $\vec{r}$.

– Dans le milieu nous avons un moment dipolaire $\vec{p} = \vec{P}\ d\tau'$ dans chaque élément du volume. Potentiel total:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\ d\tau'$$

Charges liées

– Avec $\vec{\nabla}'(1/\mathrm{r}) = \hat{\vec{\mathrm{r}}}/\mathrm{r}^2$, le potentiel peut être reformulé comme l'action d'une charge liée:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\,d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)\,d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{P}}{\mathrm{r}}\right)\,d\tau' - \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\mathrm{r}}\left(\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}\right)\,d\tau'\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{\mathcal{S}} \frac{1}{\mathrm{r}}\vec{P}\cdot d\vec{a}' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r}\left(\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}\right)\,d\tau'
\end{aligned}
$$

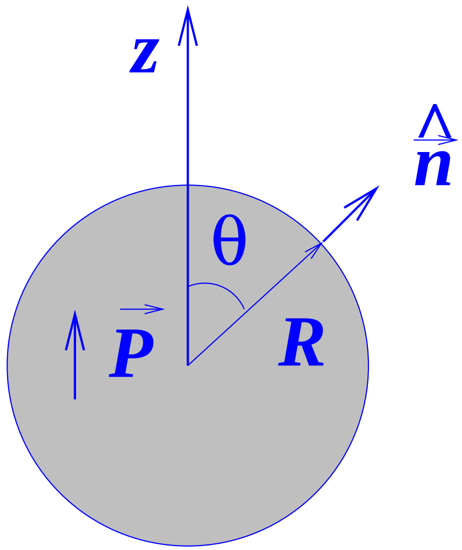
– Le premier terme ressemble au potentiel d'une charge de surface $\sigma_b \equiv \vec{P}\cdot\hat{\vec{n}}$, le deuxième à celui d'une charge de volume $\rho_b \equiv -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

– Potentiel de ces charges:

$$
V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_b}{\mathrm{r}}\,da' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_b}{r}\,d\tau'
$$

– Le champ d'un objet polarisé est le même que celui causé par la charge surface σ_b et la charge volume ρ_b ensemble.

Exemple: champ d'une sphère homogènement polarisée



– Choisissons $\vec{P} = (0,0,P)$

– Comme P est homogène, charge de volume

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

– Charge de surface:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{\vec{n}} = P \cos\theta$$

– Le champ est celui d'une charge de surface fixée sur la sphère avec densité $P\cos\theta$

– Par la méthode de la séparation des variables on trouve:

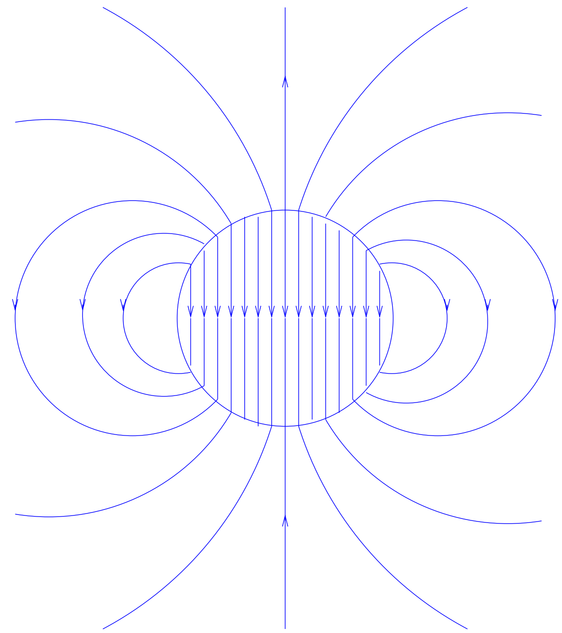
$$V(r,\theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos\theta & \text{pour l'intérieur, } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos\theta & \text{pour l'extérieur, } r > R \end{cases}$$

Exemple: champ d'une sphère homogènement polarisée

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos\theta & \text{pour l'intérieur, } r \leq R \\ \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta & \text{pour l'extérieur, } r > R \end{cases}$$

– Le champ à l'intérieur de la sphère est uniforme:

$$\vec{E}_{r\leq R} = -\vec{\nabla} V = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{\vec{z}} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P}$$



– A l'extérieur, le potentiel de la sphère est identique à celui d'un dipôle pur:

$$V_{r>R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{r}}}{r^2}$$

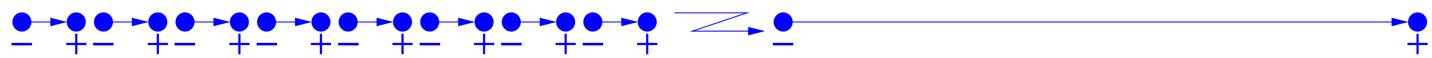
$$\vec{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{\vec{r}} + \sin\theta\hat{\vec{\theta}}\right)$$

– Le moment dipolaire est donné par la polarisation totale dans le volume:

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$$

Modèle physique pour les charges liées

– Les charges liées sont bien réelles, elles resultent de l'alignement des dipôles microscopiques:



– Moment dipolaire d'une tube court de matériau diélectrique: $\boldsymbol{\Delta p = P(Ad)}$

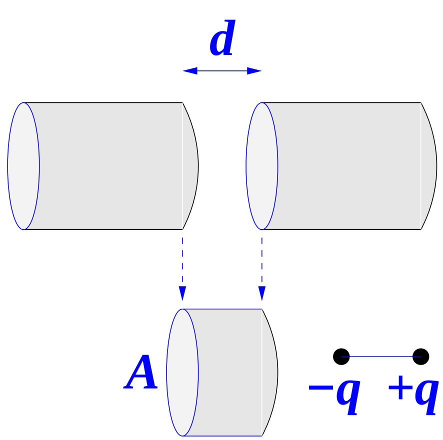
– Moment dipolaire d'un dipôle physique équivalent: $\boldsymbol{\Delta p = q_b d}$

– Charge équivalente à la fin du tube: $\boldsymbol{q_b = PA}$

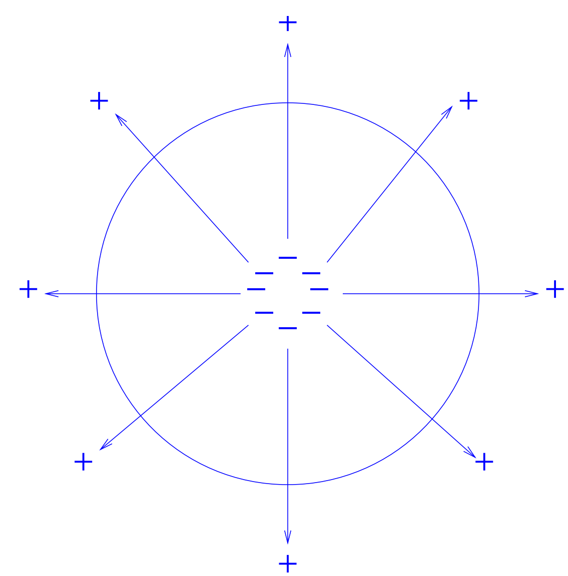
– Densité pour coupure perpendiculaire: $\boldsymbol{\sigma_b = Q/A = P}$

– Pour un tube avec coupure oblique:

$$\boldsymbol{\sigma_b = \frac{Q}{A'} = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\hat{\vec{n}}}$$



Modèle physique pour les charges liées



– Si la polarisation est inhomogène, charge est accumulée dans le volume aussi

– Conservation de la charge réclame que la charge accumulée dans un volume est égale et opposée à celle poussée à travers de sa surface:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_b \, d\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{P} \, d\vec{a} = -\int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{P}\right) \, d\tau$$

– Ceci doit être vrai pour n'importe quel volume:

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Le champ à l'intérieur d'un diélectrique

- Jusqu'ici nous avons travaillé avec un modèle qui prétend que le diélectrique contient des dipôles purs, décrit par une densité continue.
- Ce modèle marche à l'extérieur d'un diélectrique, où la distance à chaque dipôle est grande comparé à sa dimension; à l'intérieur du milieu on pourrait avoir besoin de raffiner le modèle.
- On effet, le champ microscopique à l'intérieur du milieu est extrèmement variable
  - en fonction de la position à cause des multiples charges ponctuelles qui constituent le milieu;
  - en fonction du temps, à cause du mouvement thermique des atomes et du mouvement quantique des électrons autour des noyaux.
- Dans cette mesure, la notion du champ microscopique devient inutile et doit être remplacé par la notion macroscopique, qui est la moyenne spatiale et temporelle du champ microscopique.
- Cette moyenne doit porter sur des dimensions qui sont à la fois grandes comparées aux distances atomiques et petites comparées à la dimension de l'objet. Voire le concept même de la densité.

Le champ à l'intérieur d'un diélectrique

Avons-nous calculé le bon champ macroscopique? Vérifions.

– Mettons une sphère appropriée, avec un rayon $R = \mathcal{O}(10^3)$ rayons atomiques, autour d'un point dans le milieu.

– Le champ est une superposition du champ des dipôles à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère:

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int}$$

– Les dipôles à l'extérieur sont loin du point d'observation, ils produisent un champ selon le potentiel

$$V_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{ext} \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2} \; d\tau'$$

Le champ à l'intérieur d'un diélectrique

– Les dipôles à l'intérieur sont à moyenner sur le volume de la sphère. Indépendamment de leur distribution, leur champ est

$$\vec{E}_{int} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{R^3} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P}$$

Seulle leur polarisation – qui est déjà une moyenne – compte pour le champ. Autant remplacer la distribution réelle par une distribution uniforme.

– Le moment dipolaire d'une sphère uniformement polarisée vient d'un potentiel

$$V_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

et correspond exactement à la partie de l'intégrale omise, à l'intérieur de la sphère.

– Le potentiel total est par conséquent bien celui que l'on a utilisé pour faire le calcul précédent:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}\cdot\vec{P}(\vec{r}')}{\mathrm{r}^2}\,d\tau'$$

Le déplacement électrique

Dans un milieu diélectrique:

– charges liées, dûes à la polarisation, densité ρ_b;

– charges libres, i.e. toute autre charge qui n'est pas produite par la polarisation du milieu, densité ρ_f.

Champ total selon la loi de Gauss:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{\nabla} \vec{E} &= \rho_b + \rho_f = -\vec{\nabla} \vec{P} + \rho_f \\ \vec{\nabla} \left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) &= \rho_f \end{aligned}$$

Déplacement électrique:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

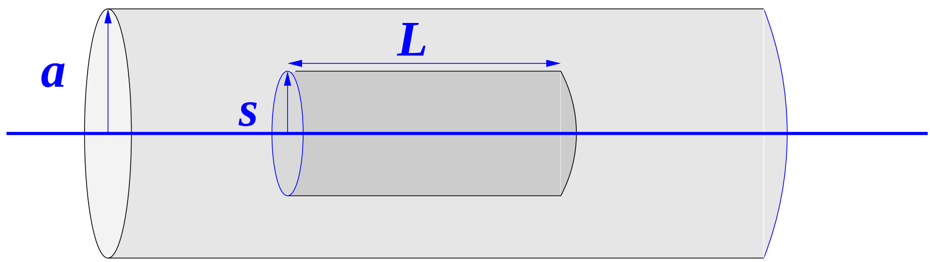
Loi de Gauss dans milieu pondéré:

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho_f \quad ; \quad \oint \vec{D}\, d\vec{a} = Q_f$$

Cette formule nous permet de travailler avec $\vec{D}$ et uniquement les charges libres quand un diélectrique est présent. Mais D n'est pas le champ électrique.

Exemple: Fil isolé

Un long fil droit chargé à une densité uniforme λ est entouré par une isolation cylindrique de rayon a. Trouver le déplacement électrique.



Loi de Gauss à une surface cylindrique de rayon s et de longeur L:

$$\begin{aligned} \oint \vec{D}\, d\vec{a} &= Q_f \\ D(2\pi s L) &= \lambda L \\ \vec{D} &= \frac{\lambda}{2\pi s}\hat{\vec{s}} \end{aligned}$$

Ce résultat est valable à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du diélectrique. A l'extérieur, pour $s > a$ on a $\vec{P} = 0$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\hat{\vec{s}}$$

A l'intérieur nous ne pouvons déterminer $\vec{E}$ que si $\vec{P}$ est connu.

Attention: le déplacement n'est pas le champ électrique

Il ne faut pas confondre le déplacement avec le champ électrique à l'intérieur d'un diélectrique:

– Il n'y a pas d'analogue à la loi de Coulomb:

$$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi}\int \frac{\hat{\vec{\mathbf{r}}}}{\mathbf{r}^2}\rho_f(\vec{r}') \, d\tau'$$

– La divergence ne détermine pas complètement un champ vectoriel, il faut le rotationel aussi. Dans le cas électrostatique, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, mais

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = \epsilon_0 \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{P}$$

n'est pas forcément zéro.

– En particulier, si un système manque de symmétrie sphérique, cylindrique ou planaire, on ne peut pas être sûr que $\vec{\nabla} \times \vec{P} = 0$, même dans une situation statique.

Conditions de (dis-)continuité

Les conditions aux interfaces des systèmes électrostatiques peuvent être re-formulées pour le déplacement:

– Discontinuité de la composante perpendiculaire à une interface:

$$D^{\perp}_{dessus} - D^{\perp}_{dessous} = \sigma_f$$

– Discontinuité de la composante parallèle à une interface:

$$\vec{D}^{||}_{dessus} - \vec{D}^{||}_{dessous} = \vec{P}^{||}_{dessus} - \vec{P}^{||}_{dessous}$$

– En présence de diélectriques ces conditions sont parfois plus utiles que celles pour le champ électrique (qui restent évidemment inchangées).

Rappel: le déplacement électrique

Dans un milieu diélectrique:

- charges liées, dûes à la polarisation, densité de surface $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$, densité de volume $\rho_b = -\vec{\nabla}\vec{P}$;
- charges libres, i.e. toute autre charge qui n'est pas produite par la polarisation du milieu, densité ρ_f.

Champ total selon la loi de Gauss:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{\nabla}\vec{E} &= \rho_b + \rho_f = -\vec{\nabla}\vec{P} + \rho_f \\ \vec{\nabla}\left(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) &= \rho_f \end{aligned}$$

Déplacement électrique:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Loi de Gauss dans milieu pondéré:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_f \quad ; \quad \oint \vec{D}\, d\vec{a} = Q_f$$

Cette formule nous permet de travailler avec $\vec{D}$ et uniquement les charges libres quand un diélectrique est présent. Mais D n'est pas le champ électrique.

Diélectriques linéaires et non-linéaires

Etudions maintenant les causes de la polarisation, l'alignement des dipôles atomiques ou moléculaires par un champ:

– Rappellons que le moment dipolaire atomique ou moléculaire induit est proportionnel au champ externe, et que le degré d'alignement des molécules dipolaires l'est aussi.

– Il est donc logique que pour certains matériaux, la polarisation – i.e. la densité des moments dipolaires élémentaires – est, elle aussi, proportionnelle au champ:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

On appelle de tels matériaux des diélectriques linéaires et la constante χ_e susceptibilité électrique.

– Attention: en général, le terme $\propto E$ est juste la première approximation d'une série de termes. Les matériaux qui ont une polarisation non-linéaire sont un important sujet de recherche.

Diélectriques linéaires

– Le champ qui cause la polarisation est la somme de tous les champs électriques présents: le champ externe, celui causé par les charges libres et le champ causé par la polarisation elle-même. La formule est donc récursive!

– Ignorons d'abord cette récursion. Le déplacement électrique pour les matériaux linéaires est:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \left(1 + \chi_e\right) \vec{E}$$

avec la permittivité électrique $\epsilon \equiv \epsilon_0 \left(1 + \chi_e\right)$:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Diélectriques linéaires

– La permittivité relative d'un matériau est apellée sa constante diélectrique:

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

– Pour les diélectriques linéaires:

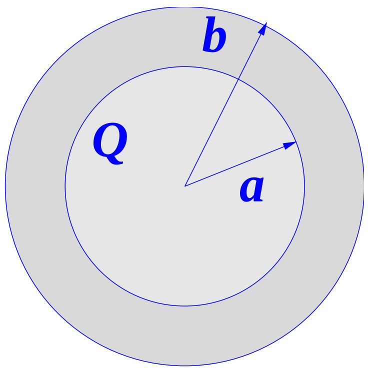
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Matériau	ϵ_R	Matériau	ϵ_r
Vide	1	Benzène	2.28
Hélium	1.000065	Diamand	5.7
Néon	1.00013	Sel	5.9
Hydrogène	1.00025	Silicium	11.8
Argon	1.00052	Méthanol	33.0
Air (sec)	1.00054	Eau	80.1
Azote	1.00055	Glace (-30 °C)	99
Vapeur (100 °C)	1.00587	$KTaNbO_3$ (0 °C)	34'000

Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press 1997

Exemple: Sphère isolée

Une sphère métallique de rayon a porte une charge Q. Elle est entourée jusqu'à un rayon b, par un diélectrique de permittivité ϵ. Trouver le potentiel au centre, relatif à l'infini.



Le système a une symétrie sphérique et nous connaissons la charge libre. Par conséquent nous commencons en calculant le déplacement:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{a} = Q_f$$

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{E} = \vec{P} = 0 & \text{pour } r < a \\ \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\vec{r}} & \text{pour } r > a \end{cases}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\vec{r}} & \text{pour } a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\vec{r}} & \text{pour } r > b \end{cases}$$

Exemple: Sphère isolée

Potentiel au centre:

$$\begin{aligned} V &= -\int_\infty^0 \vec{E}\,d\vec{l} = -\int_\infty^b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\,dr - \int_b^a \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\right)\,dr - \int_a^0 (0)dr \\ &= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0 b} + \frac{1}{\epsilon a} - \frac{1}{\epsilon b}\right) \end{aligned}$$

A cause de la symmétrie nous avons pas eu besoin de calculer ni la polarisaion, si la charge liée, mais nous savons le faire à posteriori. Dans le diélectrique:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \frac{\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon r^2}\hat{\vec{r}} \\ \rho_b &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0 \\ \sigma_b &= \vec{P}\cdot\hat{\vec{n}} = \begin{cases} \frac{\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon b^2} & \text{sur la surface extérieure} \\ -\frac{\epsilon_0\chi_e Q}{4\pi\epsilon b^2} & \text{sur la surface intérieure} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette charge compense une partie du champ causé par la sphère métallique, le réduisant par un facteur ϵ_r.

Déplacement $\simeq$ champ pour diélectriques linéaires?

On pourrait croire que $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ et $\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$ dans un diélectrique linéaire deviennent “comme le champ électrique”.

Ceci n’est vrai que dans le cas spécial d’un milieu diélectrique homogène et infini:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_f \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$$

Le déplacement est trouvé à partir de la charge libre uniquement:

$$\vec{D} = \epsilon_o\vec{E}_{vac}$$

où $\vec{E}_{vac}$ est le champ que la distribution de charges libres produirait si le diélectrique n’était pas là. Le champ électrique dans le milieu est:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\vec{D} = \frac{1}{\epsilon_r}\vec{E}_{vac}$$

simplement réduit par un facteur ϵ_r. Par exemple, une charge pontuelle dans un diélectrique linéaire, homogène et infini aura un champ:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

La polarisation du milieu masque partiellement le champ original.

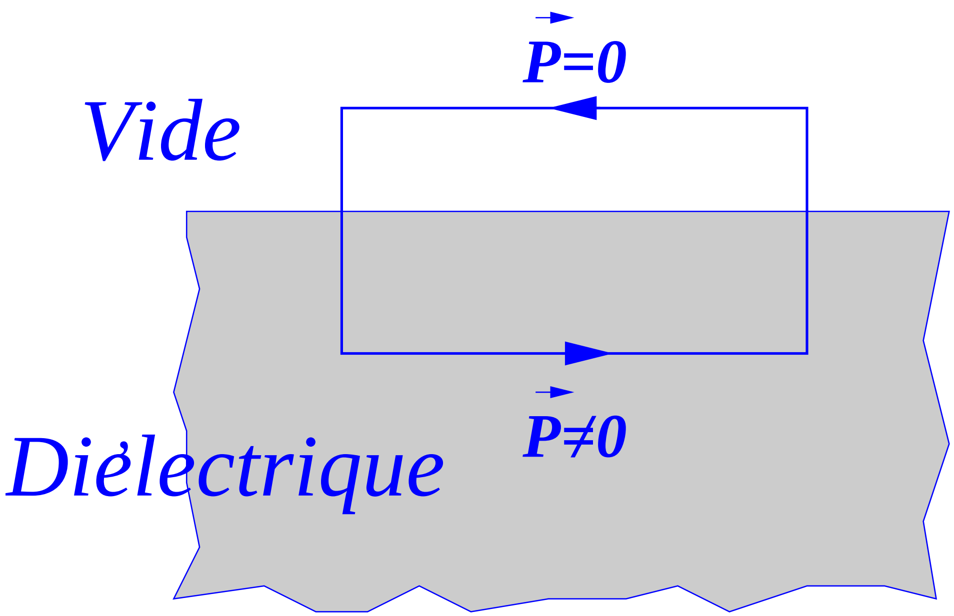
Déplacement $\simeq$ champ pour diélectriques linéaires?

En présence de deux matériaux (ou d'un seul et le vide), une interface existe où la constante diélectrique change.

Par conséquent, bien que $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$,

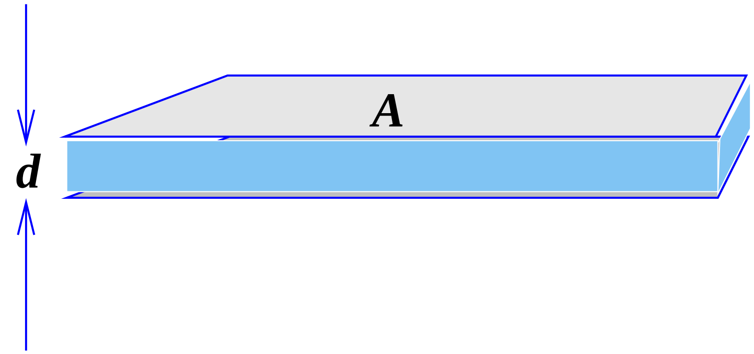
$$\oint \vec{P}\, d\vec{l} \neq 0$$

et le rotationel de $\vec{P}$ et de $\vec{D}$ ne sont pas seulement non-zéro mais infinis à l'interface.



Exemple: Condensateur avec diélectrique

Un condensateur à plans parallèles est rempli par un matériau avec une constante diélectrique ϵ_r. Quelle est sa capacitance?



Solution:

Pour un condensateur suffisamment grand, le champ est complètement confiné à l'intérieur du diélectrique. La charge sur les plans reste la même, mais le diélectrique réduit le champ et la différence de potentiel par un facteur $1/\epsilon_r$. La capacité est par conséquent augmentée:

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_r C_{vac} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Demo 173

Conditions de (dis-)continuité aux interfaces

– Dans un diélectrique linéaire et homogène, les densité des charges liées et libres sont proportionnelles:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\vec{P} = -\vec{\nabla}\left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon}\vec{D}\right) = -\left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\right)\rho_f$$

– En particulier, si aucune charge libre est incluse dans le milieu, $\rho = 0$ et la charge nette doit résider sur la surface. A l'intérieur d'un tel milieu, l'équation de Laplace règne.

– A l'interface entre deux milieux on avait trouvé:

$$\begin{aligned} D^{\perp}_{dessus} - D^{\perp}_{dessous} &= \sigma_f \\ \epsilon_{dessus} E^{\perp}_{dessus} - \epsilon_{dessous} E^{\perp}_{dessous} &= \sigma_f \end{aligned}$$

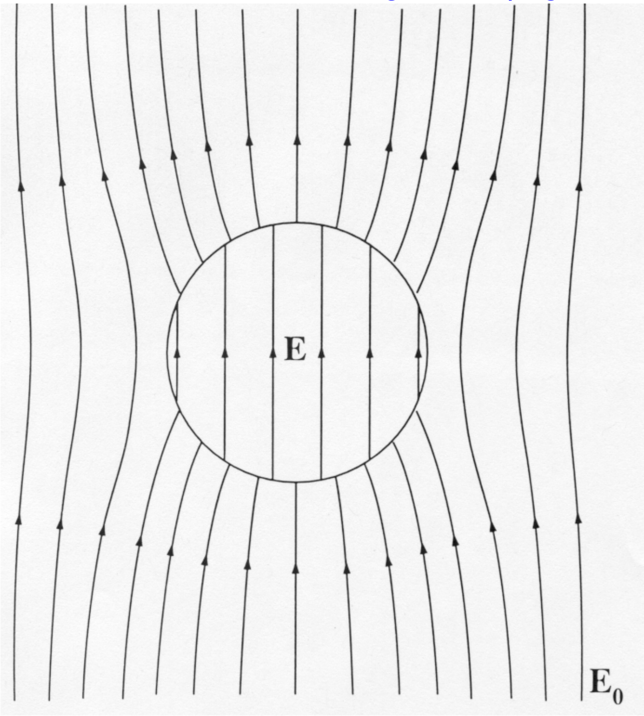
– Pour le potentiel ceci veut dire:

$$\epsilon_{dessus}\frac{\partial V_{dessus}}{\partial n} - \epsilon_{dessous}\frac{\partial V_{dessous}}{\partial n} = -\sigma_f$$

bien que le potentiel lui-même est continu, $V_{dessus} = V_{dessous}$.

Exemple: Sphère diélectrique homogène

Griffith, fig. 4.27, page 187



Une sphère non-chargée de matériau diélectrique homogène et linéaire est placée dans un champ électrique autrement uniforme. Calculer le champ à l'intérieur de la sphère.

Solution:

Cela nous rapelle l'exemple où une sphère conductrice non-chargée était mise dans un champ homogène (cf. leçon 5). Dans ce cas le champ était complètement compensé par les charges déplacées, et zéro à l'intérieur de la sphère. Pour un diélectrique cette compensation ne sera que partielle.

Exemple: Sphère diélectrique homogène

Le problème est de résoudre l'équation de Laplace pour $V_{int}(r,\theta)$ à $r \leq R$, et pour $V_{ext}(r,\theta)$ à $r \geq R$, sous les conditions suivantes:

1. $V_{int} = V_{ext}$ à $r = R$
2. $\epsilon \partial V_{int}/\partial r = \epsilon \partial V_{ext}/\partial r$ à $r = R$
3. $V_{ext} \rightarrow -E_0 r \cos\theta$ pour $r \gg R$

Pour des systèmes sphériquement symétriques on avait trouvé

$$V_{int} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

A cause de la condition (3) on a

$$V_{ext} = -E_0 r \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

La continuité (1) du potentiel à l'interface réclame que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = -E_0 R \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Exemple: Sphère diélectrique homogène

Condition (1):

$$A_l R^l = \frac{B_l}{R^{l+1}} \quad \text{pour } l \neq 1$$
$$A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2}$$

Condition (2):

$$\epsilon_r \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos\theta)$$

$$\epsilon_r l A_l R^{l-1} = -\tfrac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} \qquad \text{pour } l \neq 1$$
$$\epsilon_r A_1 = -E_0 - \tfrac{2B_1}{R^3}$$

Comme les conditions sont à remplir pour tout R et l, il en suit que

$$A_l = B_l = 0 \qquad \text{pour } l \neq 1$$
$$A_1 = -\tfrac{3}{\epsilon_r+2} E_0 \quad ; \quad B_1 = \tfrac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} R^3 E_0$$

Le potentiel et le champ à l'intérieur de la sphère sont:

$$V_{int}(r,\theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} r\cos\theta = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2} z \quad ; \quad \vec{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2}\vec{E}_0$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

Le travail necessaire pour charger un condensateur est

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

Si le condensateur est rempli avec un diélectrique linéaire, sa capacité augmente par un facteur ϵ_r:

$$C = \epsilon_r C_{vac}$$

Par conséquent, le chargement d'un tel condensateur réclame plus de travail. La raison est que l'on doit pomper plus de charge pour arriver à la même différence en potentiel, parce que le champ de ces charges est partiellement compensé par celui des charges liées.

En leçon 3 nous avons trouvé une formule générale pour l'énergie stockée dans un système électrostatique:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

Le cas d'un condensateur rempli par un diélectrique suggère que la constante diélectrique devrait intervenir:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Pour prouver cette relation, supposons que la postion du diélectrique est fixe et que la charge libre est apportée petit à petit. Quand ρ_f augmente par une portion $\Delta\rho_f$, la polarisation change et la distribution de la charge liée aussi. Mais nous sommes uniquement interessés par le travail effectué sur les charges libres:

$$\Delta W = \int V \Delta\rho_f \, d\tau$$

Avec $\vec{\nabla}\vec{D} = \rho_f$ on a $\Delta\rho_f = \vec{\nabla}(\Delta\vec{D})$, où $\Delta\vec{D}$ est le changement induit par l'incrément de charge libre:

$$\Delta W = \int \left[\vec{\nabla}(\Delta\vec{D})\right] V \, d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

$$\Delta W = \int \left[\vec{\nabla}(\Delta\vec{D})\right] V \, d\tau$$

L'intégrand est contenu dans $\vec{\nabla}[(\Delta\vec{D})V] = [\vec{\nabla}(\Delta\vec{D})]V + \Delta\vec{D} \cdot (\vec{\nabla}V)$:

$$\Delta W = \int \vec{\nabla} \left[(\Delta\vec{D})V\right] \, d\tau + \int (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Le premier terme se convertit dans une intégrale de surface qui disparait si l'intégrale porte sur tout l'espace. Le travail est par conséquent, pour n'importe quel milieu:

$$\Delta W = \int (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Si le matériau est un diélectrique linéaire, on a $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, et pour incréments infinitésimals:

$$\frac{1}{2}\Delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}\Delta(\epsilon E^2) = \epsilon(\Delta\vec{E})\vec{E} = (\Delta\vec{D}) \cdot \vec{E}$$

Le travail infinitésimal et le travail total sont donc:

$$\Delta W = \Delta \left(\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau\right)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

L'énergie dans les systèmes diélectriques

En présence de diélectriques linéaires:

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

On doit se demander pourquoi la réponse pourtant générale

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\, d\tau$$

ne s'applique pas à notre problème. La réponse est que l'on peut choisir d'inclure ou non l'énergie stockée dans les dipôles du diélectrique:

$$W_{tot} = W_f + W_b + W_{pol}$$

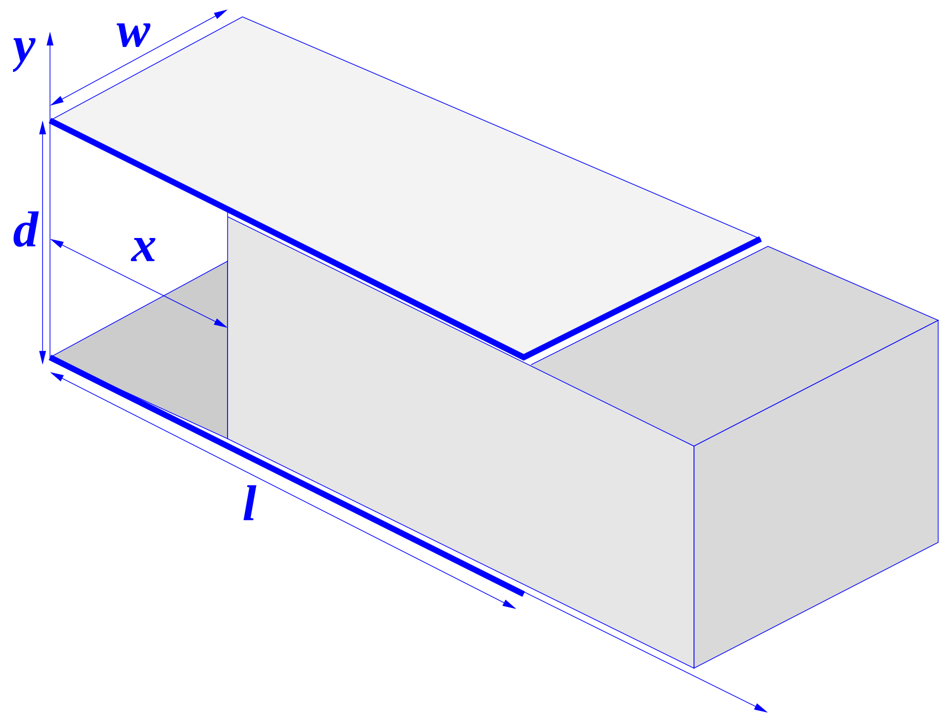
- Si l'on compte le travail pour installer les charges libre et les charges liées, chacune à sa place, on trouve en effet $W = \epsilon_0/2\int E^2\, d\tau$. Mais ceci ne tient pas compte du travail nécessaire pour polariser le matériau.
- Si, comme nous avons fait plus haut, on compte le travail pour installer uniquement les charges libres, et que l'on laisse le milieu se polariser à sa guise après chaque apport de nouvelle charge libre, on inclut implicitement l'énergie stockée dans la polarisation du millieu. Le travail est donc plus grand et on trouve $W = 1/2\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, d\tau$.

Forces sur un diélectrique

Comme un conducteur est attiré dans un champ électrique externe, une force agit sur un diélectrique. Les charges liées sont attirés vers les charges libres de signe opposé.

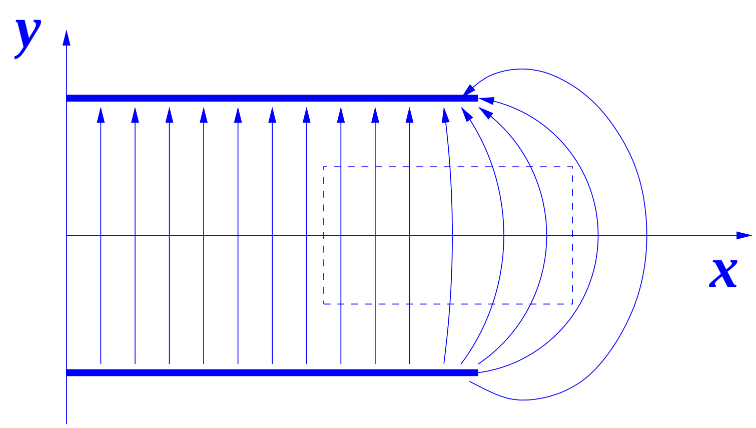
Le calcul de ces forces peut être difficile, parce que les champs aux bords ne peuvent en général pas être négligés.

On avait prétendu que le champ dans un condensateur à plans parallèles est constant à l'intérieur et zéro à l'extérieur. Dans ce cas, la force sur le diélectrique serait zéro aussi, parce que le champ serait normal aux plans partout.



Forces sur un diélectrique

Mais le champ doit s'étendre au delà du condensateur, sinon $\oint \vec{E}\ d\vec{l} \neq 0$. Ce champ des bords attire le diélectrique entre les plans du condensateur.



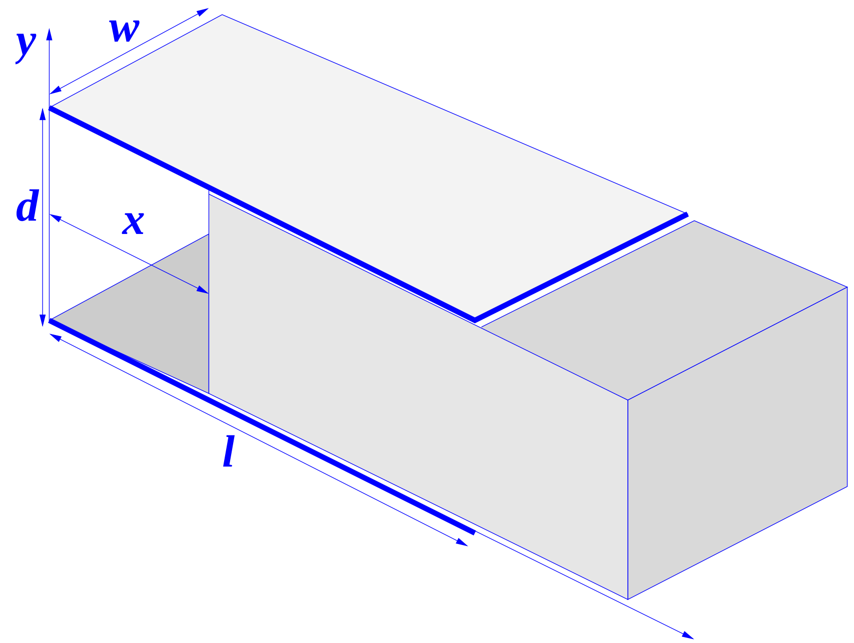
Le calcul du champ aux bords est complexe, mais on peut l'éviter en utilisant un raisonnement basé sur l'énergie du système. Si W est l'énergie du système, un déplacement infinitésimal dx correspond à un travail:

$$dW = F_{mec}\, dx = -F\, dx$$

où F_{mec} est la force agissant contre la force électrostatique F qui attire le diélectrique, $F_{mec} = -F$.

Forces sur un diélectrique

La force électrostatique est par conséquent:



$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{dW}{dx} \\
&= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}CV^2\right)
\end{aligned}
$$

La capacité est:

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d}(\epsilon_r l - \chi_e x)$$

La charge totale, $Q = CV$, ne change pas quand le diélectrique est déplacé:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\
F &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d}V^2
\end{aligned}
$$

La force est négative, le diélectrique est attiré dans le condensateur.

Forces sur un diélectrique

Attention:

On a supposé que la charge ne change pas quand on tire sur le diélectrique. On peut aussi connecter les deux plans à une batterie et tenir le potentiel constant. Dans ce cas il faut inclure le travail fourni par la batterie:

$$dW = F_{mec}\, dx + V\; dQ \qquad \longrightarrow \qquad F = -\frac{dW}{dx} + V\frac{dQ}{dx}$$

Maintenant la charge change, mais le potentiel est constant:

$$F = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} + V^2\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0\chi_e w}{2d}V^2$$

Le résultat est donc indépendant de cette condition, il est entièrement déterminé par la disposition des charges libres et liées.

Rappel: Equations de Maxwell et de Lorentz

Lois de Gauss et de Coulomb font partie des

lois fondamentales de l'électrodynamique:

Equations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques sont produits:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Electrostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

Equations de Lorentz décrivent comment les champs électriques et magnétiques agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Electrostatique:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

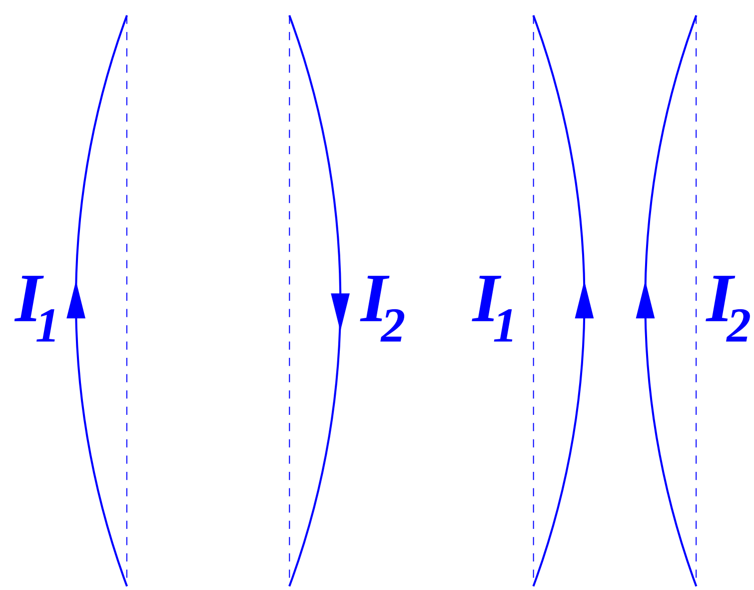
Le champ magnétique

Jusqu'ici on a considéré des situation statiques. Admettons maintenant que les charges électriques sources soient en mouvement:

– Les charges électriques en mouvement causent un champ magnétique.
– Ce champ exerce une force sur autres charges qui sont en mouvement, la force de Lorentz.
– Remarquez que l'on a de nouveau réduit une action à distance à deux actions locales: la création du champ et son action.

Ceci cause des forces entre conducteurs qui n'ont pas de charge nette, pourvu qu'un courant court à l'intérieur.
La direction de cette force dépend de la direction des courants:

– attractive pour courants parallèles
– repulsive pour courants anti-parallèles

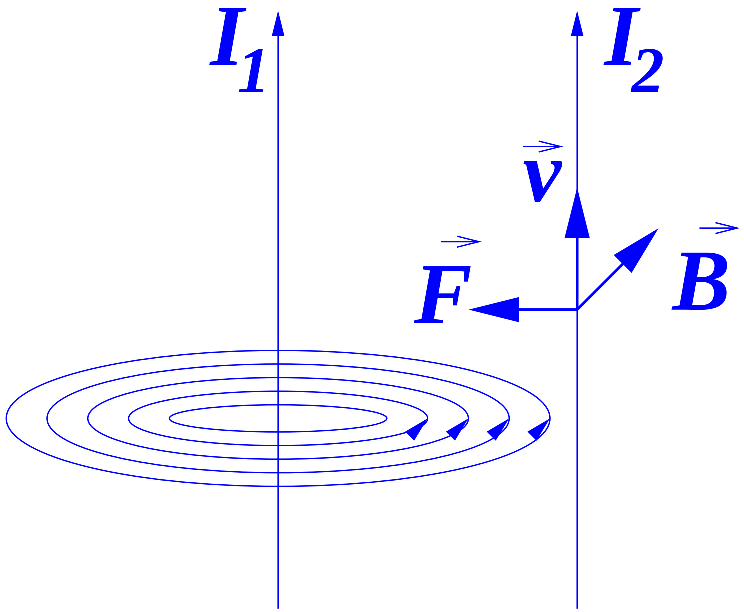


Demo 215

Force magnétique

L'expérience revèle:

- Le champ causé par le courant entoure le fil d'une manière circulaire.
- Les vecteurs de la vitesse des électrons qui forment le courant, du champ magnétique et de la force sont tous orthogonaux, selon la règle de la main droite.



Loi de Lorentz décrit l'action du champ magnétique:

$$\vec{F}_{mag} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Superposition d'un champ électrique et magnétique, action conjointe:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Avant de considerer les sources du champ magnétique, regardons de plus près ses actions et les trajectoires qui en résultent.

Demo 212

Mouvement de cyclotron

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique homogène, $\vec{B} \perp \vec{v}$:

– La force centripède est fourni par le champ magnétique:

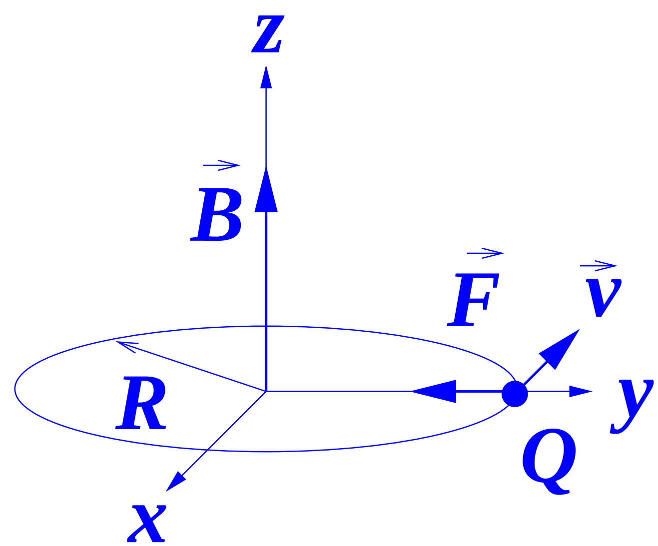
$$\frac{mv^2}{R} = QvB$$

– Mouvement circulaire à rayon constant, en fonction de l'impulsion $p = mv$:

$$p = QBR$$

avec la fréquence cyclotron:

$$\omega = \frac{QB}{m}$$



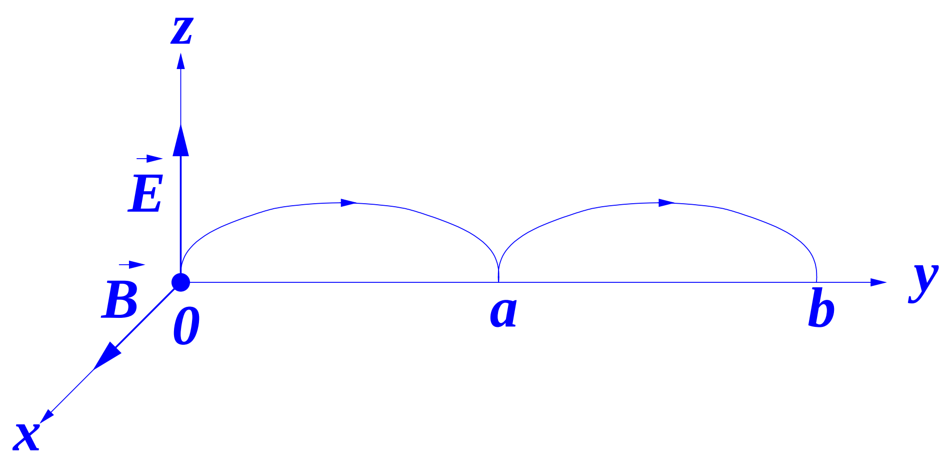
Si $\vec{B}$ n'est pas orthogonal à $\vec{p}$, un mouvement parallele à $\vec{B}$ avec $\vec{p}_{||} =$ const s'additionne au mouvement circulaire avec $R = R(p_\perp)$.

Trajectoire résultante: hélice.

Mouvement cycloïdal

Une trajectoire plus exotique résulte si l'on ajoute un champ électrique homogène, $\vec{E} \perp \vec{B}$:

- Au début, la particule de charge Q est au repos à l'origine.
- Le champ $\vec{E}$ l'accelère, et une force $\vec{v} \times \vec{B}$ la dévie.
- A un certain point, la trajectoire devient anti-parallèle à $\vec{E}$ et la particule est freinée.
- Le long de l'axe $\vec{E} \times \vec{B}$, le mouvement recommence.



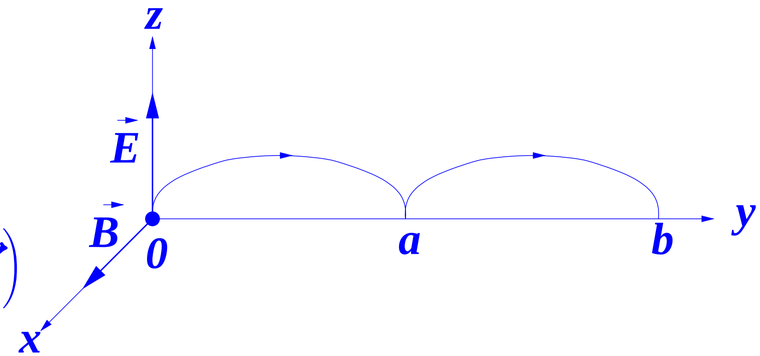
Traitement quantitatif:

- Mouvement reste dans le plan (y,z), $\vec{r}(t) = (0,y(t),z(t))$.
- Vitesse: $\vec{v} = (0,\dot{y},\dot{z})$.

Mouvement cycloïdal

– Force électrique: $Q\vec{E} = QE\hat{\vec{z}}$

– Force magnétique:



$$Q(\vec{v} \times \vec{B}) = Q \begin{vmatrix} \hat{\vec{x}} & \hat{\vec{y}} & \hat{\vec{z}} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = QB\left(\dot{z}\hat{\vec{y}} - \dot{y}\hat{\vec{z}}\right)$$

Loi de Newton:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = Q\left(E\hat{\vec{z}} + B\dot{z}\hat{\vec{y}} - B\dot{y}\hat{\vec{z}}\right) = m\vec{a} = m\left(\ddot{y}\hat{\vec{y}} + \ddot{z}\hat{\vec{z}}\right)$$
$$QB\dot{z} = m\ddot{y} \quad ; \quad qE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$$

Avec la fréquence cyclotron $\omega = QB/m$:

$$\ddot{y} = \omega\dot{z} \quad ; \quad \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right)$$

La solution est presque évidente: la dérivée deuxième de $y(t)$ reproduit la derivée de $x(t)$ à une constante près, et similairement pour z et y:

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{E}{B}t + C_3 \\ z(t) &= C_2 \cos\omega t - C_1 \sin\omega t + C_4 \end{aligned}$$

Mouvement cycloïdal

Les conditions initiales, $x(0) = z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ déterminent les constantes:

$$y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)$$
$$z(t) = \frac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t)$$

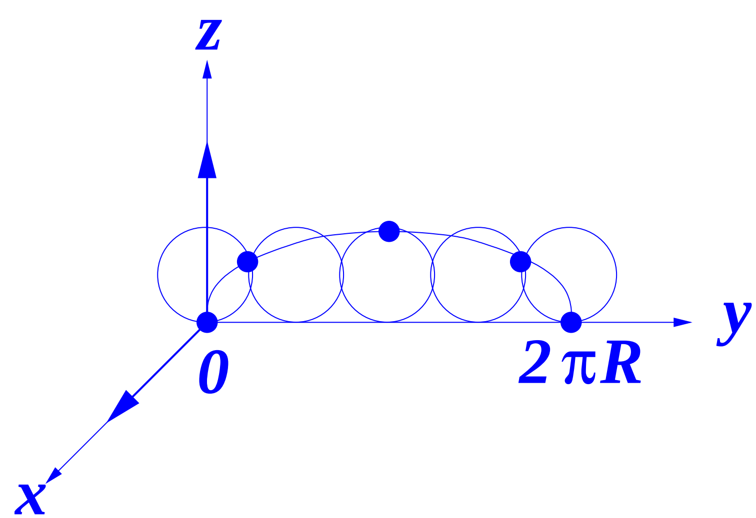
Si l'on définit $R = E/\omega B$ on peut joindre les deux équations selon $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$:

$$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Ceci est la trajectoire d'un point sur la peri-phérie d'un cercle qui roule sans glisser le long de l'axe y avec la vitesse:

$$v = \omega R = \frac{E}{B}$$

Cette courbe est appelée une cycloïde.



Travail par les forces magnétiques

Pour déplacer une charge par une distance infinitésimale $d\vec{l} = \vec{v}\ dt$ le travail fait par les forces magnétiques est:

$$dW_{mag} = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{l} = Q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v}\ dt = 0$$

Ceci est évident, car $\vec{v} \times \vec{B} \perp \vec{v}$ veut dire que $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ pour n'importe quelle direction de $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

Par conséquent, les forces magnétiques n'effectuent pas de travail.

Considerez un aimant qui soulève une charge magnétique. Le travail que cela represente ne vient pas des forces magnétiques, contraire aux apparences!

Le courant électrique

Le courant dans un fil est défini comme la charge par unité de temps qui passe un certain point. Par définition, charges négatives qui passent vers la droite comptent autant que charges positives qui passent à gauche. Ceci est dû au fait physique que les effets électromagnétiques dépendent du produit $q\vec{v}$, invariant sous un changement simultané des deux signes.

Attention: cette symmétrie nous permettra de traiter les anti-particules comme des particules qui reculent dans le temps

Dans les métaux, ce sont les électrons qui bougent le plus facilement et par conséquent sont responsables du courant. Mais ils bougent dans la direction opposée au courant par convention, parce-que leur charge est négative. Notez que le conducteur reste inchargé, parce que autant d'électrons sortent d'un bout et entrent par l'autre.

L'unité du courant est l'Ampère, définit par un Coulomb par seconde:

$$[I] = \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Le courant électrique dans un fil

Une densité de charge linéaire $\boldsymbol{\lambda}$ qui court par un fil à une vitesse $\boldsymbol{v}$ constitue un courant

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{\lambda v}$$

parce que un segment $\boldsymbol{v\ dt}$, qui porte une charge $\boldsymbol{\lambda v\ dt}$ passe le point d'observation dans une intervalle de temps $\boldsymbol{dt}$. En réalité, le courant est donc un vecteur

$$\vec{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}}$$

dont la direction suit le fil.

La force magnétique qui agit sur un segment du fil est:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{mag}} = \int \left(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)\ \boldsymbol{dq} = \int \boldsymbol{\lambda} \left(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)\ \boldsymbol{dl} = \int \left(\vec{\boldsymbol{I}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)\ \boldsymbol{dl}$$

Comme $\vec{\boldsymbol{I}}||\vec{\boldsymbol{l}}$, on peut écrire:

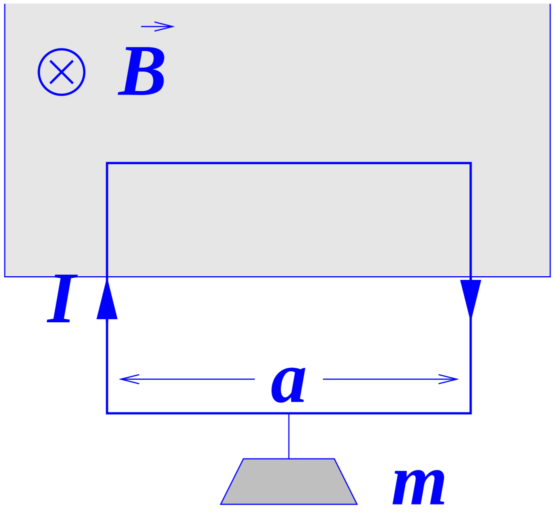
$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{mag}} = \int \boldsymbol{I} \left(\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

Au cas typique où le courant est constant le long du fil, cela se simplifie à

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{mag}} = \boldsymbol{I} \int \left(\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)$$

Exemple: lévitation magnétique

Une boucle de fil rectangulaire soutient une masse m. La partie supérieure de la boucle passe par un champ magnétique homogène $\vec{B}$, normal à sa surface. Pour quel courant I dans la boucle la force magnétique compense-t-elle exactement la force gravitationelle?



Si le courant passe dans la direction indiquée, la force sur la partie supérieure horizontale est :

$$F_{mag} = IBa$$

Les forces sur les deux segments verticaux se compensent. Pour soutenir le poids mg, il nous faut un courant

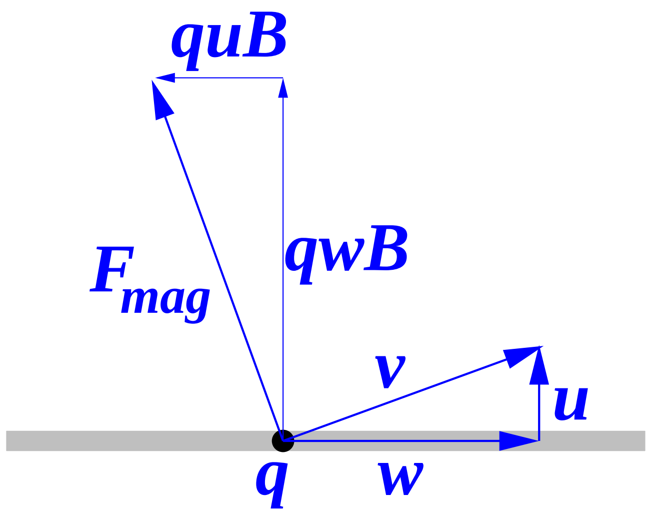
$$I = \frac{mg}{Ba}$$

La force magnétique n'effectue pas de travail?

Quand on augmente le courant au-delà de cette valeur critique, le poids sera levé. Par conséquent l'énergie potentielle sera augmentée et un travail effectué. Mais ce ne peut pas être la force magnétique qui fait ce travail!

Quand la boucle se déplace verticalement, la vitesse $\vec{v}$ des charges à l'intérieur du fil aquiert une composante verticale $\vec{u}$. Comme la vitesse horizontale $\vec{w}$ reste la même, la force verticale sur la boucle ne change pas:

$$F_{vert} = \lambda a w B = I B a$$

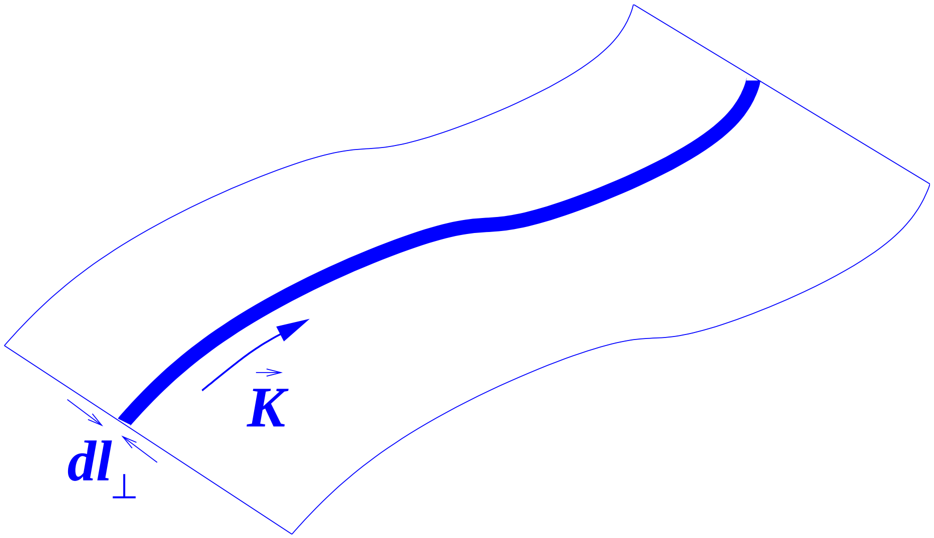


Mais la force magnétique sur les charges dévellope une composante horizontale quB qui s'oppose au mouvement des charges. C'est contre cette force horizontale que la batterie ou le générateur qui maintiennent le courant doivent travailler. Mais c'est une différence de potentiel électrique qui effectue ce travail.

La force magnétique dévie la force électrique d'une direction purement horizontale vers une composante verticale, qui fait le travail.

Courants de surface

Un courant qui s'étend sur une surface est décrit par la densité de courant superficielle $\vec{K}$:



$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_\perp}$$

c'est à dire le courant par unité de longueur normale au flux des charges.

Si la densité locale des charge mobiles est $\sigma(\vec{r})$ et leur vitesse $\vec{v}(\vec{r})$, la densité de courant est:

$$\vec{K}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r})$$

La force magnétique sur un courant de surface est:

$$\vec{F}_{mag} = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \sigma \, da = \int \left(\vec{K} \times \vec{B}\right) \, da$$

Attention: tout comme $\vec{E}$ est discontinu sur une surface chargée, $\vec{B}$ est discontinu sur une surface parcourue par un courant. Il faut alors utiliser le champ moyen pour calculer la force.

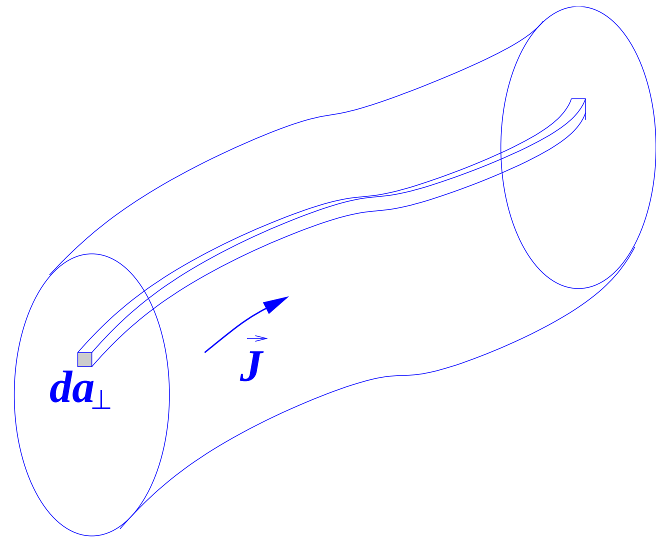
Courants de volume

Analogue aux charges, la distribution de courants la plus générale est celle qui porte sur un volume:

Un courant qui s'étend sur un volume est décrit par la densité de courant volumique $\vec{J}$:

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_\perp}$$

c'est à dire le courant par unité de surface normale au flux des charges.



Si la densité locale des charge mobiles est $\rho(\vec{r})$ et leur vitesse $\vec{v}(\vec{r})$, la densité de courant est:

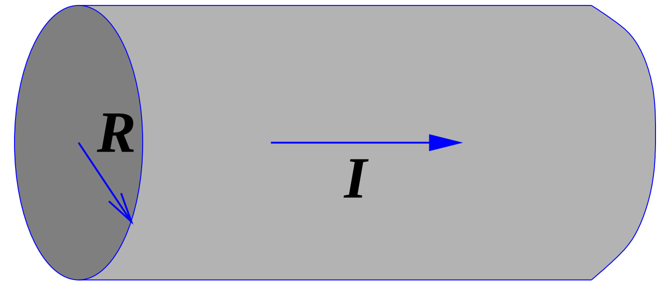
$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,\vec{v}(\vec{r})$$

La force magnétique sur un courant de volume est:

$$\vec{F}_{mag} = \int \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rho\, d\tau = \int \left(\vec{J} \times \vec{B}\right)\, d\tau$$

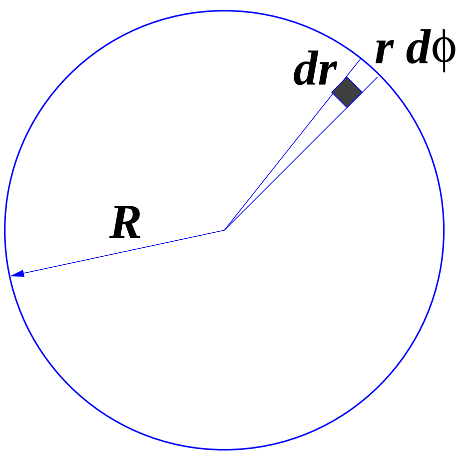
Exemples: courants de volume

Densité uniforme:
Un courant I soit distribué uniformement sur un fil de section circulaire, avec rayon R. Quel est la densité de courant?



La surface totale du fil, perpendiculaire au flux des charges, est πR^2, et la densité de courant:

$$J = \frac{I}{\pi R^2}$$



Densité variable:
Si la densité de courant varie proportionelle à la distance r du centre, $J = kr$, on trouve la densité de courant en intégrant $\vec{J} = d\vec{I}/da_\perp$:

$$I = \int (kr)(r\ dr\ d\phi) = 2\pi \int_0^R r^2\ dr = \frac{2\pi k R^3}{3}$$

$$J(r) = \frac{3I}{2\pi R^3} r$$

Equation de continuité

Le courant qui passe par une surface en termes de la densité de courant:

$$I = \int_{\mathcal{S}} J \, da_\perp = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Pour une surface close, ceci est le flux de charge qui sort du volume:

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} \vec{J}\right) \, d\tau$$

A cause de la conservation de charge, ce flux doit correspondre à la diminution de la charge dans le volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\vec{\nabla} \vec{J}\right) \, d\tau = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau = -\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho}{dt}\right) \, d\tau$$

Comme ceci s'applique à n'importe quel volume, on a une équation de continuité locale:

$$\vec{\nabla} \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Si un flux net de charge sort par une surface close, la densité de charge dans le volume inclus diminue en conséquence.

Les courants s'expriment en termes de charges ponctuelles, courants linéaires, de surface ou de volume:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \vec{v}_i \sim \int_{\text{ligne}} \vec{I} \, dl \sim \int_{\text{surface}} \vec{K} \, da \sim \int_{\text{volume}} \vec{J} \, d\tau$$

Courants continus

Les distributions de charges stationaires produisent des champs électriques statiques. De la même manière, les courants continus produisent des champs magnétiques statiques et définissent la magnétostatique.

Par courants continus, on entend les flux constants, sans cesse, ni début ni fin, où aucune charge ne s'accumule ni se disperse nulle part. Ceci est évidemment un concept idéalisé, tout comme la charge stationaire.

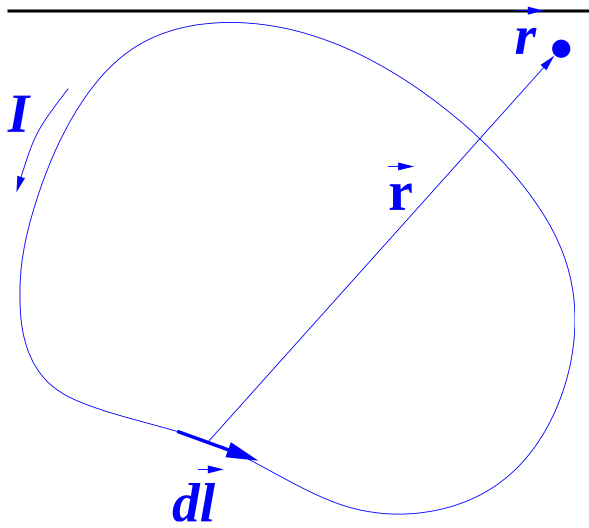
Par la dernière caractéristique on voit que, pour courants continus, on a $\partial\rho/\partial t = 0$, et l'équation de continuité devient:

$$\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

Charge stationaire	$\longrightarrow$	champ électrique constant:	électrostatique
Courant continu	$\longrightarrow$	champ magnétique constant:	magnétostatique

Une charge ponctuelle ne pouvant pas produire un courant continu, notre discussion des champs magnétiques – produits par les charges en mouvement – commence directement avec le courant.

La loi de Biot-Savart



Un courant linéaire continu I produit un champ magnétique selon la loi de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}\times\hat{\vec{\mathbf{r}}}}{\mathbf{r}^2}\,dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l'}\times\hat{\vec{\mathbf{r}}}}{\mathbf{r}^2}$$

Ceci est l'analogue magnétique de la loi de Coulomb pour l'électrostatique.

Le parcours de l'intégration suit le courant, dans la direction du flux. $d\vec{l'}$ est un élement le long du fil, et $\vec{\mathbf{r}}$ est le vecteur qui relie la source à l'observateur.

La perméabilité du vide:

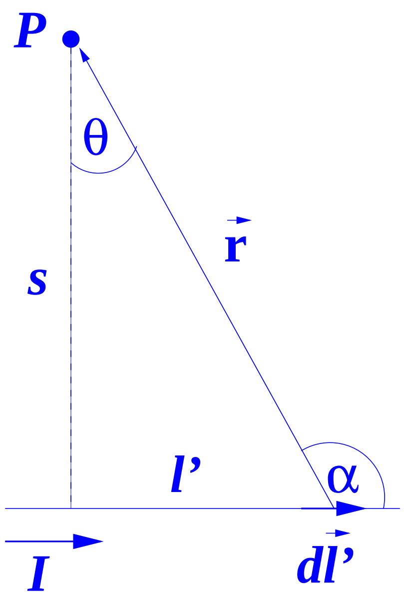
$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

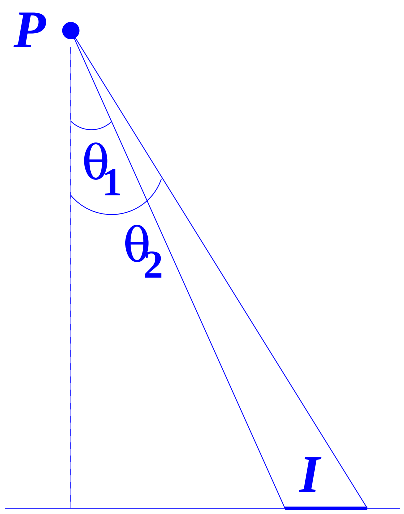
arrange les unités tel que B est en Newton/Ampere-mètre, ou Tesla, comme réclamé par la loi de Lorentz:

$$[B] = \mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\ m}}$$

Le principe de superposition s'applique: une collection de courants cause un champ qui est la somme vectorielle des champs individuels.

Exemple: champ magnétique d'un fil droit





Trouver le champ magnétique à une distance s d'un long fil droit qui porte un courant continu I.

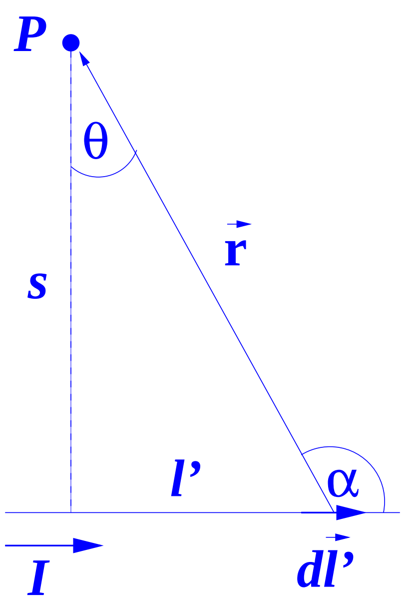
Le vecteur infinitésimal $(d\vec{l'} \times \hat{\vec{r}})$ pointe hors de la page, avec magnitude

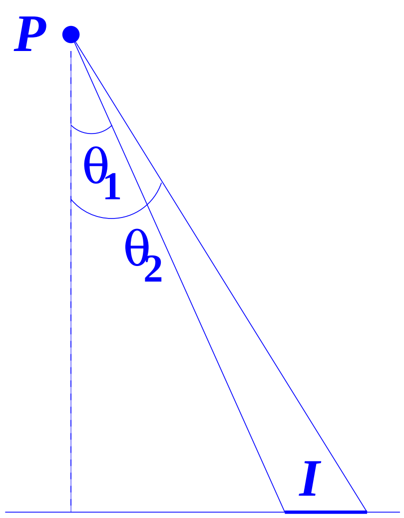
$$dl' \sin\alpha = dl' \cos\theta \longrightarrow dl' = \frac{s}{\cos^2\theta}\, d\theta \quad ; \quad s = \mathrm{r}\cos\theta \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{r}^2} = \frac{\cos^2\theta}{s^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{l_1}^{l_2} \frac{d\vec{l'} \times \hat{\vec{r}}}{\mathrm{r}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2\theta}{s^2}\right) \left(\frac{s}{\cos^2\theta}\right) \cos\theta \; d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \; d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Exemple: champ magnétique d'un fil droit





Champ d'un fil de longueur finie:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Un fil infiniment long correspond à $\theta_1 = -\pi/2$, $\theta_2 = \pi/2$:

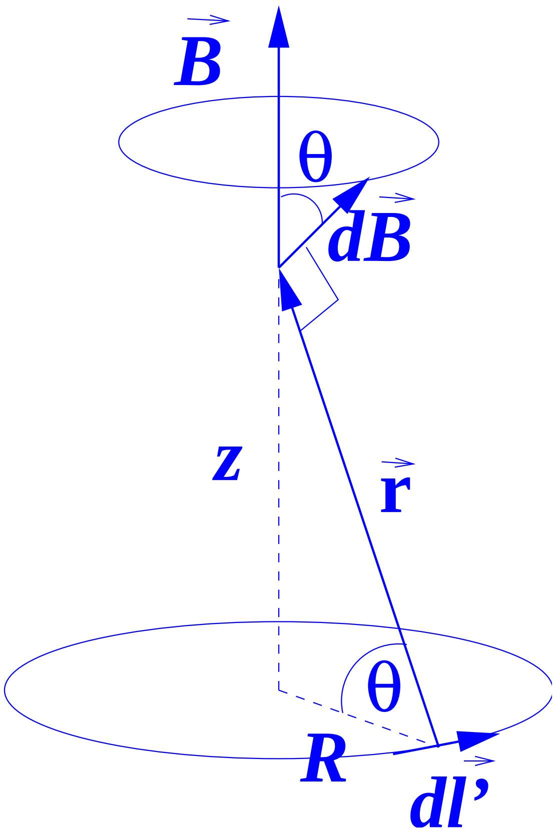
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

La direction du champ est tangentielle à un cercle autour du fil, selon la règle de la main droite.

Notez que le champ magnétique est inversément proportionel à la distance, tout comme le champ électrique d'une charge linéaire.

Exemple: champ magnétique d'un fil circulaire

Trouver le champ magnétique à une distance z sur l'axe centrée d'une spire circulaire de rayon R, qui porte un courant continu I.



Le champ $d\vec{B}$ qui vient du segment $d\vec{l'}$ est orthogonal à $\vec{r}$. En intégrant autour du spire, $d\vec{B}$ décrit un cône. Les composentes horizontales se compensent, les composantes verticales s'additionnent à:

$$
\begin{aligned}
B(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl' \ \cos\theta}{r^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) 2\pi R \\
&= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Demo 210

Biot-Savart pour courants de surface et de volume

Pour une densité de courant de superficielle $\vec{K}$, la loi de Biot-Savart est:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}\, da'$$

Pour une densité de courant de volume $\vec{J}$ on a:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}\, d\tau'$$

On pourrait être tenté de conclure que, pour une charge ponctuelle, on pourrait écrire

$$\vec{B}(\vec{r}) \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

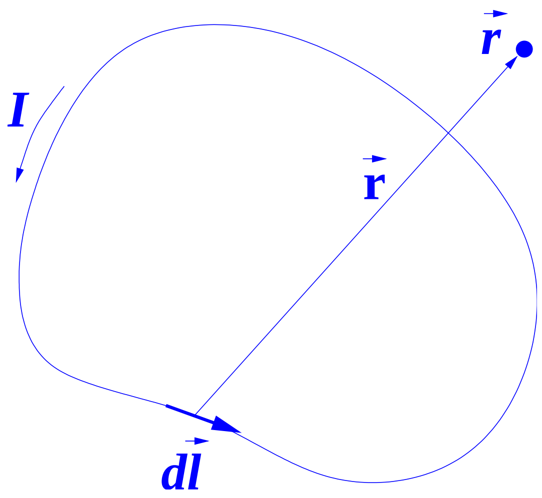
mais ceci est faux! La raison est qu'une charge ponctuelle ne peut en aucun cas causer un courant continu, par conséquent la loi de Biot-Savart n'est pas applicable.

Rappel: équations de Lorentz et Biot-Savart

Les équations de Lorentz décrivent comment les champs électriques et magnétiques agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

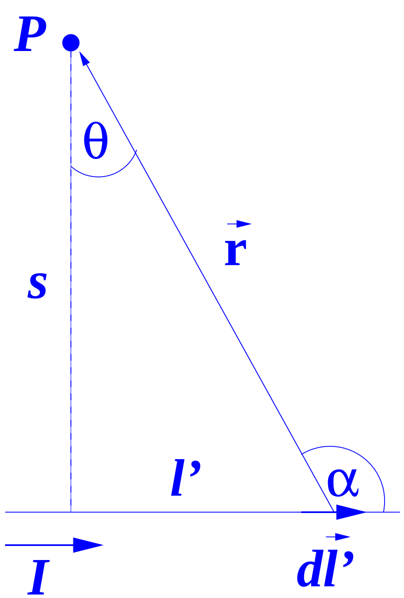
Analogue magnétique de la loi de Coulomb pour l'électrostatique:

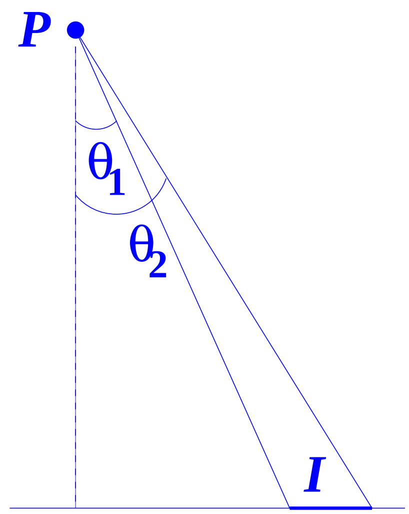


Un courant linéaire continu I produit un champ magnétique selon la loi de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I} \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}\, dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l'} \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

Rappel: champ magnétique d'un fil droit





Champ d'un fil de longueur finie:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Un fil infiniment long correspond à $\theta_1 = -\pi/2$, $\theta_2 = \pi/2$:

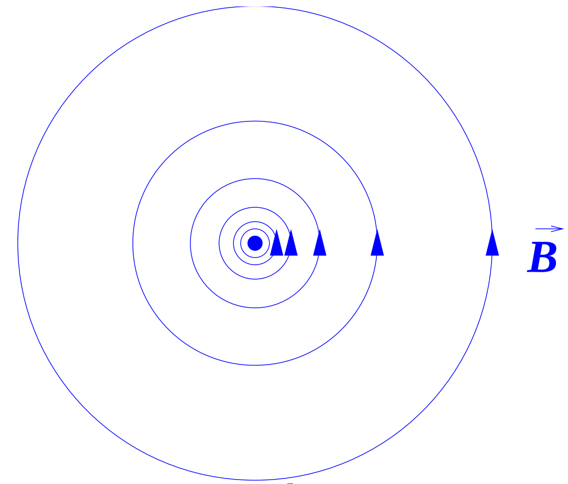
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

La direction du champ est tangentielle à un cercle autour du fil, selon la règle de la main droite.

Notez que le champ magnétique est inversément proportionnel à la distance, tout comme le champ électrique d'une charge linéaire.

Champ magnétique des courants linéaires

Le champ magnétique d'un courant continu dans un fil droit infiniment long a évidemment un rotationnel. Le long d'un parcours circulaire normal au fil et centré sur lui, on a:



$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint\, dl = \mu_0 I$$

Cette intégrale est indépendante du rayon s du parcours: la circonférence augmente $\propto\ s$, le champ diminue $\propto\ 1/s$. En effet le résultat est correct pour n'importe quel parcours autour du fil. En coordonnées cylindriques:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\vec{\phi}} \qquad ; \qquad d\vec{l} = ds\ \hat{\vec{s}} + s\ d\phi\ \hat{\vec{\phi}} + dz\ \hat{\vec{z}}$$

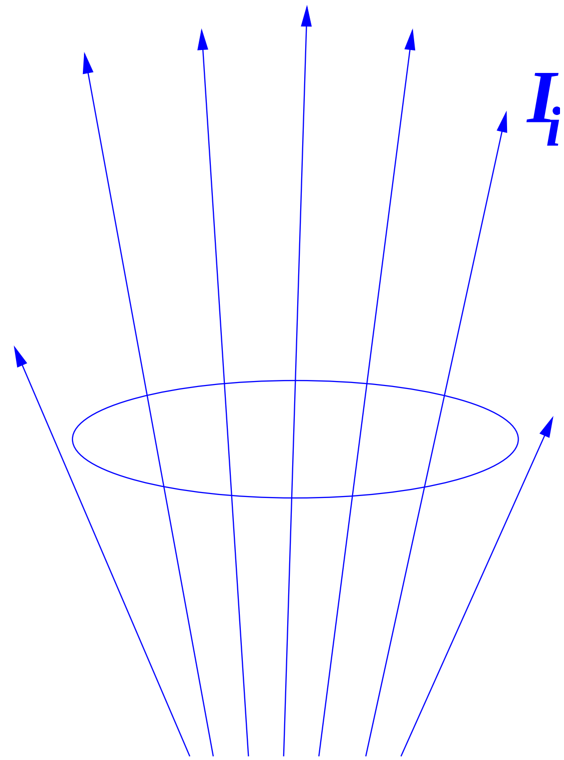
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint \frac{1}{s} s\ d\phi\ = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi}\ d\phi = \mu_0 I$$

Ceci est basé sur le fait que le parcours fait juste une fois le tour du fil. Si on avait fait deux tours, l'intégrale porterait sur l'intervalle de 0 à 4π etc.

Si, par contre, le parcours n'incluait pas le fil, ϕ varierait de ϕ_1 à ϕ_2 et retournerait à ϕ_1, donc $\int\ d\phi = 0$.

Champ magnétique des courants linéaires

Si l'on a affaire à un faisceau de fils droits infiniment longs, ceux qui passent par la surface entourée par le parcours contribuent $\mu_0 I_i$, ceux à l'extérieur ne contribuent pas.
L'intégrale le long du parcours donne:



$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 \int \vec{J}\, d\vec{a}$$

où I_{inc} est le courant total des fils qui traversent la surface, et $\vec{J}$ une densité équivalente de courants continus.

En appliquant le théorème de Stokes on trouve

$$\int \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\, d\vec{a} = \mu_0 \int \vec{J}\, d\vec{a} \quad \longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

On est tombé ainsi sur la loi d'Ampère générale qui décrit le rotationnel du champ magnétique si E est constant. Malheureusement, il n'est pas possible de décrire toutes les distributions de courants par une collection de courants dans des fils droits infiniment longs. Notre raisonnement doit par conséquent être généralisé.

La divergence du champ magnétique

On va dériver la loi générale directement de la loi de Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \, d\tau'$$

La formule décrit le champ $\vec{B}(\vec{r})$, en termes d'une intégrale sur une distribution de courants $\vec{J}(\vec{r}')$, avec la distance $\vec{\mathrm{r}} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ entre courant et observateur.

On applique la divergence par rapport à $\vec{r}$:

$$\vec{\nabla}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) \, d\tau'$$

$$\vec{\nabla} \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) = \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') \right)}_{=0} - \vec{J}(\vec{r}') \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right)}_{=0}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Le rotationnel du champ magnétique

On applique le rotationnel par rapport à $\vec{r}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) \, d\tau'$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) = \vec{J} \left(\vec{\nabla} \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) - \left(\vec{J} \vec{\nabla} \right) \frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

où l'on a supprimé tous les termes avec une dérivée de $\vec{J}(\vec{r}')$ par rapport à $\vec{r}$.

Le deuxième terme donne une intégrale zéro (à prouver soi-même, voir Griffith p.224). Le premier terme invoque la divergence du champ central calculée dans la leçon 2:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{\mathrm{r}})$$

On reproduit par conséquent le résultat obtenu pour les courants linéaires:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \, d\tau' = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

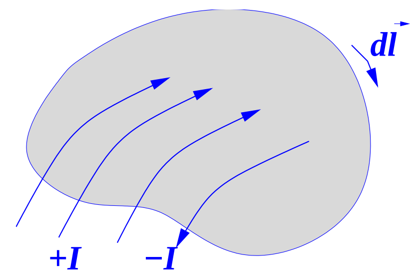
maintenant sans restriction sur la densité de courant.

La loi d'Ampère

Dans l'électrostatique, la loi de Gauss, dérivée de la loi de Coulomb, identifie la densité de charge comme la source de la divergence du champ électrique. Dans la magnétostatique, la loi d'Ampère, dérivée de la loi de Biot-Savart, identifie les courants comme la source du rotationnel des champs magnétiques. Elle est valable pour des courants continus arbitraires.

Sa forme différentielle est:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



Sa forme intégrale suit en utilisant le théorème de Stokes:

$$\int \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\, d\vec{a} = \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J}\, d\vec{a}$$

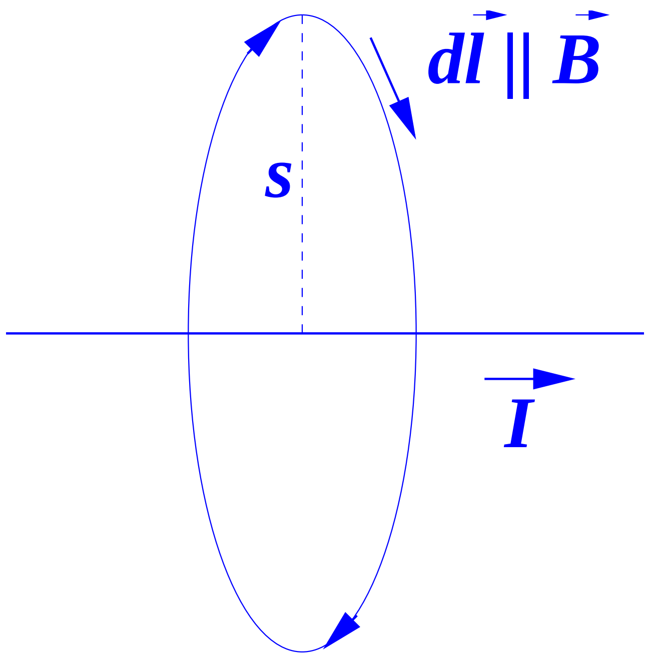
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc}$$

où l'intégrale porte sur le parcours qui entoure la surface, et I_{inc} est le courant total qui traverse la surface.

La direction positive des courants et le sens du parcours sont donnés par la règle de la main droite. Pour des configurations de courants présentant une certaine symmétrie, la loi d'Ampère est l'outil idéal pour le calcul du champ magnétique.

Exemple: champ magnétique d'un long fil droit

Trouver le champ magnétique à une distance s d'un long fil droit qui porte le courant I. On a déjà resolu ce problème en leçon 8 en utilisant la loi de Biot-Savart.



Avec la loi d'Ampère le calcul est considérablement simplifé. Nous savons que le champ aura une direction tangentielle à un cercle de rayon s autour du fil, et que par symmétrie sa magnitude sera constante autour d'un tel cercle. Par conséquent nous choisissons un cercle comme parcours d'intégration :

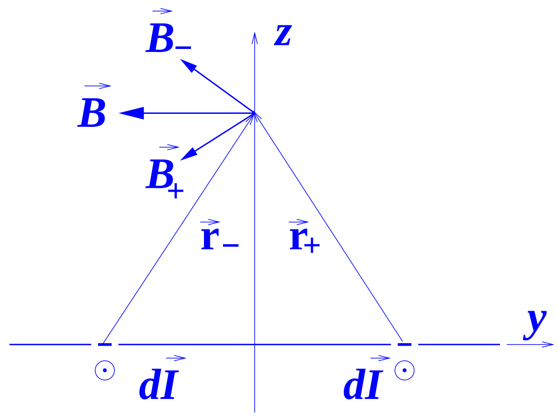
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \vec{B} \oint d\vec{l} = 2\pi s B = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 I$$

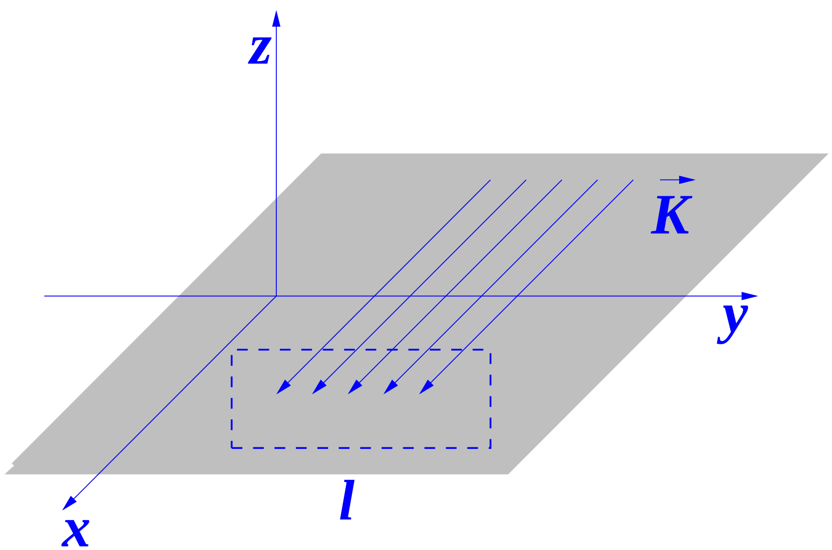
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Exemple: champ magnétique d'une couche de courant

Trouver le champ magnétique d'un plan infini qui porte la densité de courant $\vec{K} = K\hat{\vec{x}}$.

La loi de Biot-Savart nous indique que $\vec{B}$ doit être orthogonal à $\vec{K}$. Il n'a pas de composante le long de z, par symmétrie, mais pointe dans la direction $-y$ dans l'hémisphère $z > 0$, et vers $+y$ pour $z < 0$. A cause de l'étendue infinie du plan, sa magnitude doit être constante.





A cause de ces propriétés, nous choisissons un parcours d'intégration rectangulaire parallèle aux axes des coordonnées:

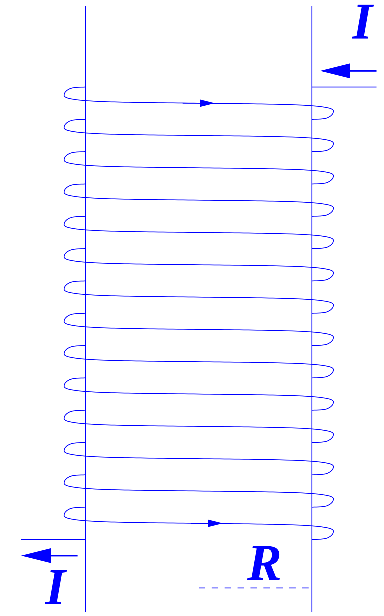
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 2Bl = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 K l$$

$$\vec{B} = \begin{cases} -(\mu_0/2)K\hat{\vec{y}} & \text{for } z > 0 \\ +(\mu_0/2)K\hat{\vec{y}} & \text{for } z < 0 \end{cases}$$

Notez que le champ est indépendant de la distance du plan, comme le champ électrique d'une surface uniformément chargée.

Exemple: Champ magnétique d'un long solénoïde

Trouver le champ magnétique d'une très longue bobine solénoïde qui contient n spires par unité de longueur, très près l'un de l'autre, sur un cylindre de rayon R et qui porte un courant continu I.
La spécification que les spires sont proches nous permet de les traiter comme circulaires, et d'ignorer ainsi la minuscule composante du courant le long de l'axe du solénoïde. Par conséquent nous traitons uniquement le courant circulaire.



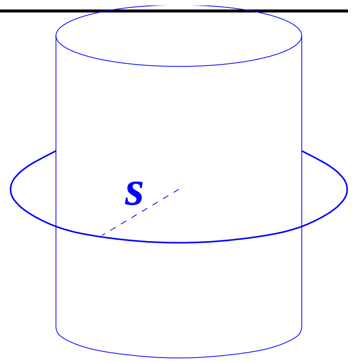
Considérons d'abord la direction du champ magnétique:

– Le champ n'a pas de composante radiale, car si B_s existait, un renversement du courant renverserait sa direction. Mais une telle opération est équivalente à tourner la bobine de 180°, qui doit laisser B_s invariant. La composante radiale doit par conséquent être zéro, $B_s = 0$.

Exemple: Champ magnétique d'un long solénoïde

– Le champ n'a pas de composante tangentielle non plus, car un parcours circulaire normal à l'axe n'inclut pas de courant:

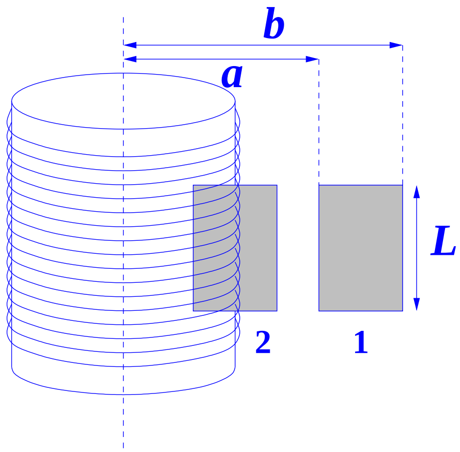
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 2\pi s B_\phi = \mu_0 I_{inc} = 0 \quad \rightarrow \quad B_\phi = 0$$



– Il en suit que $\vec{B}$ pointe dans la direction de l'axe du solénoïde, i.e. seul $B_z \neq 0$. Par la règle de la main droite, nous attendons qu'il pointe de la sortie du courant vers l'entrée à l'intérieur de la bobine, et inversément à l'extérieur. En plus, le champ tend vers zéro très loin de la bobine.

Nous calculons la magnitude du champ en utilisant des parcours rectangulaires dans un plan qui inclut l'axe du solénoïde. Le parcours 1 est complètement hors de la bobine et n'inclut aucun courant:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = [B(a) - B(b)]\, L = 0 \quad \rightarrow \quad B(a) = B(b)$$



Comme B tend vers zéro pour $a,b \rightarrow \infty$, il en suit que le champ vaut zéro partout à l'extérieur de la bobine. Ceci est du au fait que nous avons supposé une bobine infiniment longue.

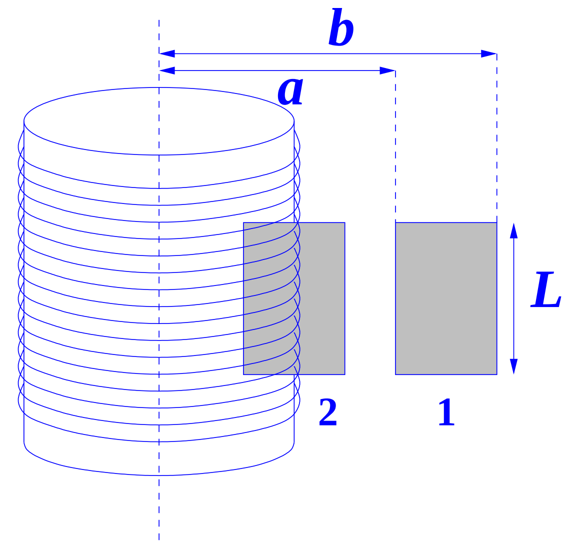
Exemple: Champ magnétique d'un long solénoïde

Le parcours 2 inclut enfin du courant:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = BL = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 n I L$$

et nous donne un champ homogène à l'intérieur de la bobine:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\vec{z}} & s < R \\ 0 & s > R \end{cases}$$



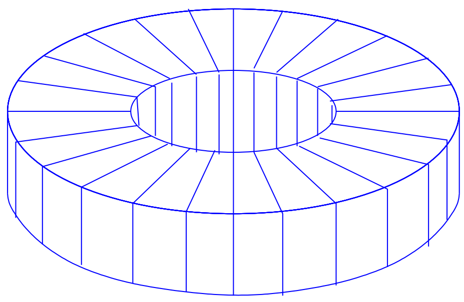
Demo 210/211

En analogie avec la loi de Gauss nous constatons que la loi d'Ampère est toujours valide mais pas toujours utile. Elle nous permet de calculer très rapidement des champs magnétiques si les courant suivent:

– des lignes droites infiniment longues
– des plans infinis
– des solénoïdes infinis

Exemple: Champ magnétique d'un toroïde

Imaginez un long solénoïde courbé et refermé sur lui-même en anneau. Une telle bobine est appellée un toroïde. La section d'une telle bobine n'a pas besoin d'avoir une forme spécifique, tant que la forme reste constante autour de l'anneau. Il en suit que le champ magnétique d'une telle bobine, B_ϕ est tangentiel à l'axe de l'anneau à l'intérieur de la bobine et zéro partout à l'extérieur.



Demo 210

Le champ est très facilement calculé avec un parcours circulaire autour de l'axe de l'anneau. Pour un parcours à l'intérieur de la bobine on a:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = 2\pi s B_\phi = \mu_0 I_{inc} = \mu_0 N I$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}\hat{\vec{\phi}} & \text{à l'intérieur de la bobine} \\ 0 & \text{à l'extérieur de la bobine} \end{cases}$$

où N est le nombre total de spires de la bobine.

Rappel: Equations de Maxwell et de Lorentz

Les équations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétique sont produits:

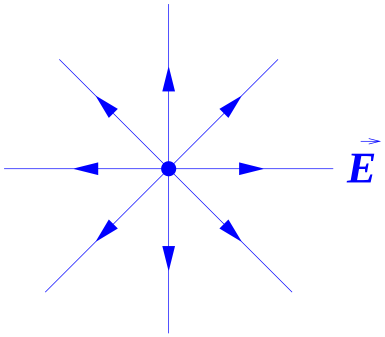
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

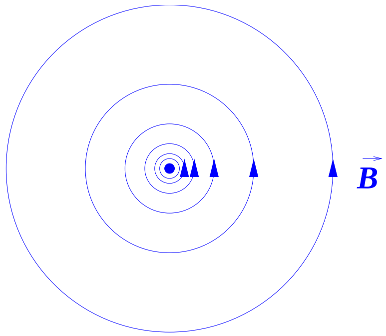
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Electro- et magnétostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{(loi de Gauss)} \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad \text{(loi d'Ampère)}$$





Equations de Lorentz décrivent comment les champs agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Le potentiel vecteur magnétique

L'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ nous a permis d'introduire le potentiel électrique,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Un champ qui découle d'un potentiel scalaire est automatiquement sans rotationnel, parce que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0$. On rapelle que le potentiel électrique a une ambiguité importante: nous pouvons additionner n'importe quelle fonction scalaire à gradient zéro (c'est à dire n'importe quelle constante) sans changer le champ et la trajectoire résultante.

Comme $\vec{\nabla} \vec{B} = 0$, nous introduisons un potentiel vecteur $\vec{A}$ pour le champ magnétique:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Un champ qui découle ainsi d'un potentiel vecteur est automatiquement sans divergence, parce que $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.

Le potentiel vecteur magnétique

Appliquons la loi d'Ampère magnétostatique:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

Le potentiel vecteur magnétique a lui aussi une ambiguité: nous pouvons additioner n'importe quelle fonction sans rotationnel, le champ magnétique (et la trajectoire) ne changeront pas. On peut utiliser cette liberté de jauge pour éliminer la divergence de $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\vec{A} = 0$$

Pour démontrer ceci, supposons que nous commençons avec un potentiel $\vec{A}_0$ qui a une divergence non-zéro, et que l'on additionne le gradient d'une fonction λ arbitraire, $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla}\lambda$:

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A}_0 + \nabla^2\lambda$$

Le nouveau potentiel est sans divergence si:

$$\nabla^2\lambda = -\vec{\nabla}\vec{A}_0$$

Le potentiel vecteur magnétique

La condition $\nabla^2\lambda = -\vec{\nabla}\vec{A}_0$ est analogue à l'équation de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

pour une “source” $\vec{\nabla}\vec{A}_0$, et nous connaissons la solution (si $V \longrightarrow 0$ pour $\mathbf{r} \longrightarrow \infty$):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho}{\mathbf{r}}\, d\tau' \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\vec{A}_0}{\mathbf{r}}\, d\tau'$$

Par conséquent il est toujours possible de jauger le potentiel $\vec{A}$ tel que sa divergence soit zéro.

Dans cette jauge, la loi d'Ampère devient:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} &= \mu_0\vec{J} \\ \nabla^2\vec{A} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned}$$

Le potentiel vecteur magnétique

Ce sont trois équations du type Poisson pour les trois dimensions. En coordonnées cartésiennes:

$$\nabla^2\vec{A} = (\nabla^2 A_x)\hat{\vec{x}} + (\nabla^2 A_y)\hat{\vec{y}} + (\nabla^2 A_z)\hat{\vec{z}} = -\mu_0 J_x\hat{\vec{x}} - \mu_0 J_y\hat{\vec{y}} - \mu_0 J_z\hat{\vec{z}}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x\\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y\\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z\end{aligned}$$

Sous condition que la densité de courant tend vers zéro à l'infini, les solutions sont:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}(\vec{r'})}{\mathrm{r}}\,d\tau'$$

Pour les courants de surface et linéaires, on a:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{K}}{\mathrm{r}}\,da' \quad ; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}}{\mathrm{r}}\,dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{1}{\mathrm{r}}\,d\vec{l'}$$

Ces solutions suggèrent que la direction du potentiel vecteur suivra généralement la direction du courant. Si tous les courants ont la même direction, $\vec{A}$ est même strictement parallèlle à $\vec{J}$.

Le potentiel vecteur magnétique

Les potentiels électriques et magnétiques forment un quadrivecteur:

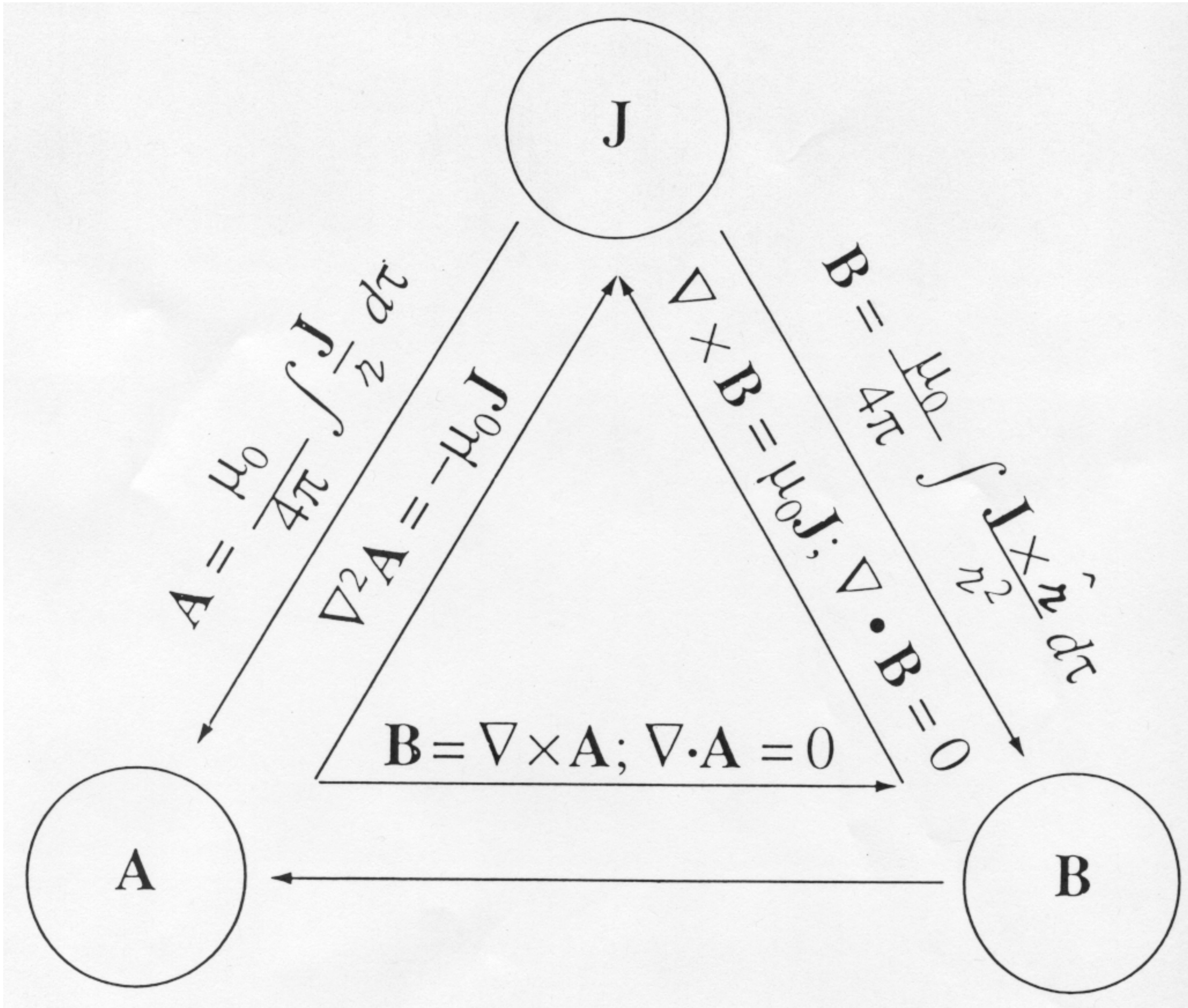
$$A^\mu = \begin{pmatrix} V/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

En théorie des champs quantiques, c'est ce vecteur qui représente la fonction d'onde du photon et qui transmet les forces électromagnétiques. Il a les mêmes propriétés sous transformations de Lorentz que le vecteur de l'espace-temps:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, son carré est invariant sous transformations de Lorentz et reste indépendent du système inertiel. En effet, c'est en étudiant l'électrodynamique des charges en mouvement qu'Einstein à découvert la relativité restreinte.

Courant, champ et potentiel magnétostatique



Griffith, figure 5.48, page 240

Conditions de (dis-)continuité magnétostatique

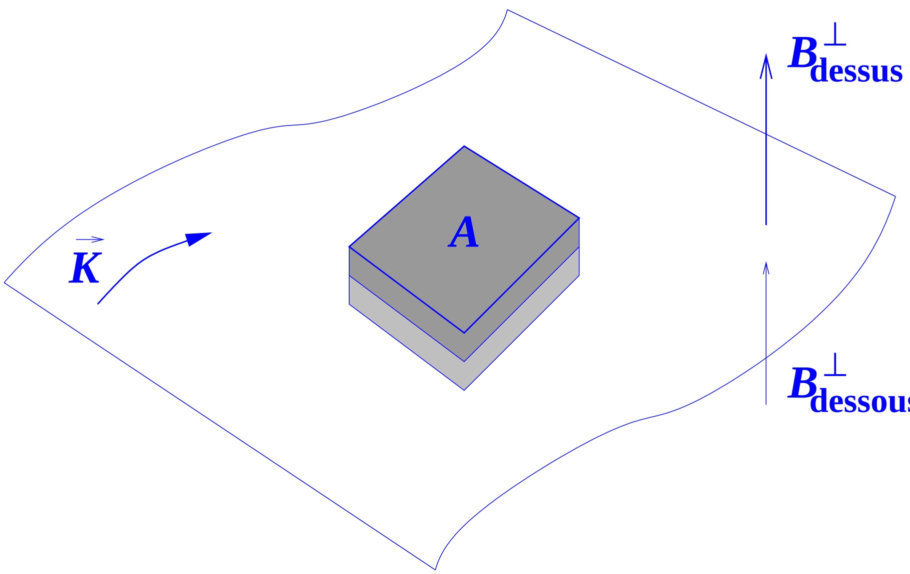
Le champ électrique est discontinu sur une surface chargée. Le champ magnétique est discontinu sur une surface qui porte un courant, mais cette fois c'est la composante tangentielle qui change.

Comme la divergence de $\vec{B}$ est zéro, on a sous forme intégrale:

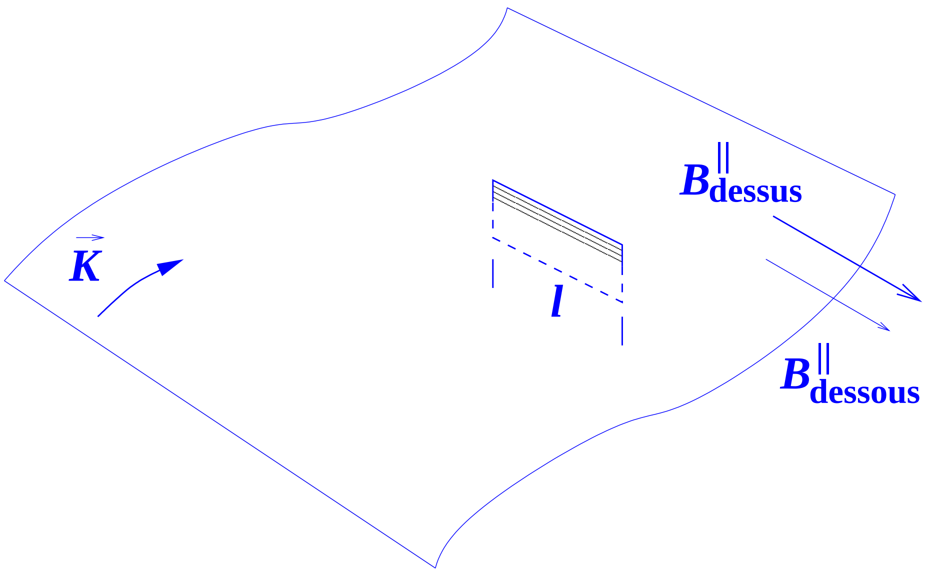
$$\oint \vec{B}\, d\vec{a} = 0$$

Pour une boîte mince qui se trouve à cheval sur un courant de surface, ceci veut dire que

$$B^{\perp}_{dessus} = B^{\perp}_{dessous}$$



Conditions de (dis-)continuité magnétostatique



Pour la composante tangentielle, la loi d'Ampère pour une spire rectangulaire nous donne:

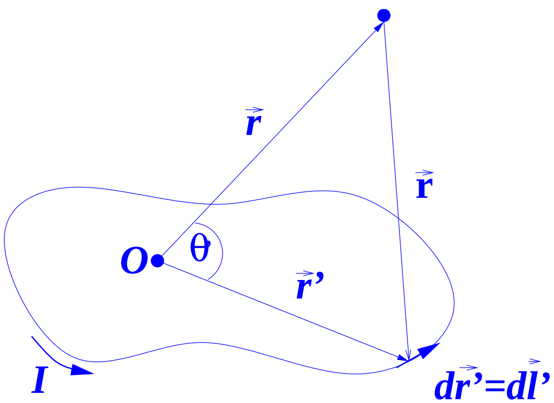
$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = (B^{||}_{dessus} - B^{||}_{dessous})l$$
$$= \mu_0 I_{inc} = \mu_0 K l$$
$$B^{||}_{dessus} - B^{||}_{dessous} = \mu_0 K$$

C'est donc la composante de $\vec{B}$ parallèle à la surface et perpendiculaire au courant qui est discontinue. Une spire parallèle au courant nous revèle que la composante parallèle est continue, comme la composante normale à la surface:

$$\vec{B}^{||}_{dessus} - \vec{B}^{||}_{dessous} = \mu_0 \left(\vec{K} \times \hat{\vec{n}}\right)$$

où $\hat{\vec{n}}$ est un vecteur unitaire normal à la surface, et qui pointe vers l'hémisphère "dessus".

Le développement du champ magnétique en multipôles



En analogie avec le cas électrostatique, un développement en multipôles du champ magnétique sert à déterminer un champ approximatif loin d'une distribution de courants. On écrit le potentiel en termes de puissances de $1/r$. Si la distance est suffisemment grande, le premier terme non-nul du développement suffira pour caractériser le champ.

En leçon 5 on avait trouvé le développement de la distance entre source et observateur en termes des polynomes de Legendre:

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

Le potentiel vecteur peut par conséquent être écrit comme

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{1}{\mathrm{r}}\,d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\oint r'^n P_n(\cos\theta')\,d\vec{l}' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{r}\oint d\vec{l}' + \frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta' d\vec{l}' + \frac{1}{r^3}\oint r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta' - \frac{1}{2}\right)d\vec{l}' + \cdots\right] \end{aligned}$$

Encore une fois, nous appelons le premier terme monopôle, le deuxième dipôle, le troisième quadrupôle etc.

Le champ magnétique dipolaire

Il s'avère que le terme monopôle est toujours zéro, parce que l'intégrale correspond au courant total intégré autour d'un parcours clos:

$$I \oint d\vec{l'} = \oint d\vec{I'} = 0$$

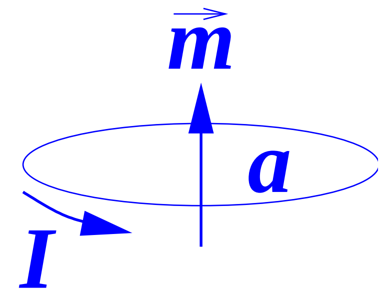
Ceci reflète le fait que des charges magnétiques n'existent pas, $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$.

Normalement, le terme dominant sera alors le dipôle magnétique:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos\theta' d\vec{l'}$$

En termes d'un moment magnétique dipolaire $\vec{m}$:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \hat{\vec{r}}}{r^2}$$
$$\vec{m} \equiv I \int d\vec{a} = I\vec{a}$$

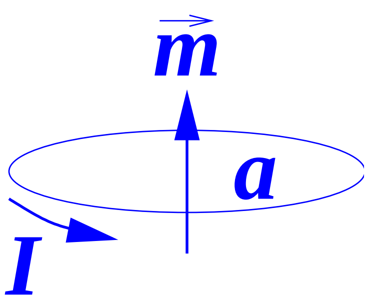


Nous avons noté par $\vec{a}$ la surface vectorielle, c'est à dire un vecteur normal, dont la longueur est donné par la surface. La direction du moment magnétique est défini par la règle de la main droite.

Le champ magnétique dipolaire

Le moment magnétique dipolaire dépend uniquement des caractéristiques du courant, il est indépendent du choix de l'origine. Souvenez vous que le moment dipolaire électrique était indépendent de l'origine uniquement si la charge totale était zéro. Dans le cas magnétique ceci est toujours le cas.

Encore en analogie avec l'électrostatique, il existe une limite dans laquelle le potentiel du terme dipolaire magnétique n'est pas seulement une approximation du potentiel total, mais exacte. Cette limite est celle d'une boucle infinitésimale qui porte un courant infini, avec le produit de la surface et du courant constant, pour donner un moment $m = aI$ constant.



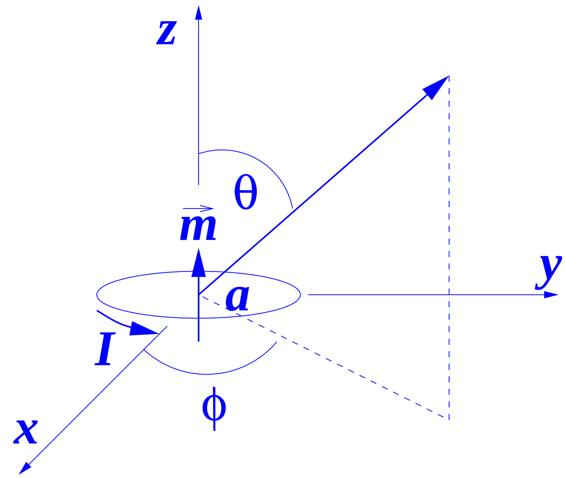
En application pratique, l'approximation dipolaire est bonne quand la distance est grande comparé à la taille caractéristique de la boucle.

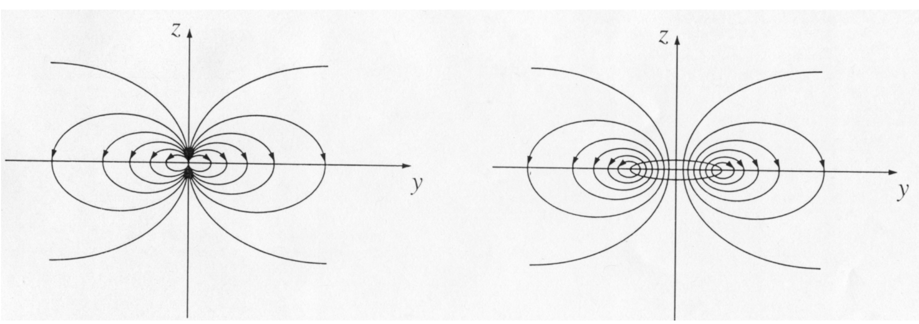
Le champ magnétique dipolaire

Nous calculons le champ magnétique d'un dipôle pur, situé à l'origine et pointant dans la direction de l'axe z. Le potentiel et le champ à un point $\vec{r} = (r,\theta,\phi)$ sont:

$$\vec{A}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^2}\hat{\vec{\phi}}$$

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{\vec{r}} + \sin\theta\hat{\vec{\theta}}\right)$$





Griffith, figure 5.55, page 246

Ceci est identique à la forme du champ électrique dipolaire (voir leçon 5) loin du dipôle. Evidemment, près du dipôle, le champ magnétique d'une petite boucle est différent du champ électrique d'un petit dipôle électrique!

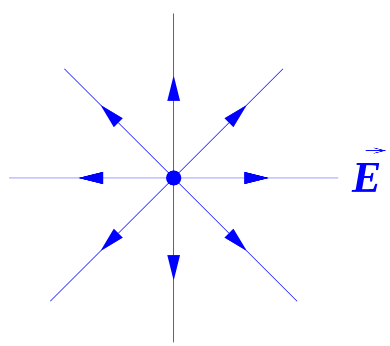
Rappel: Equations de Maxwell et de Lorentz

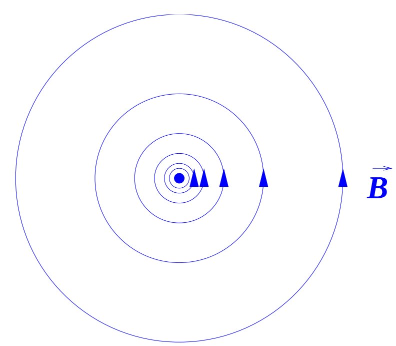
Les équations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques sont produits:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Electro- et magnétostatique:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{(loi de Gauss)} \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad \text{(loi d'Ampère)}$$

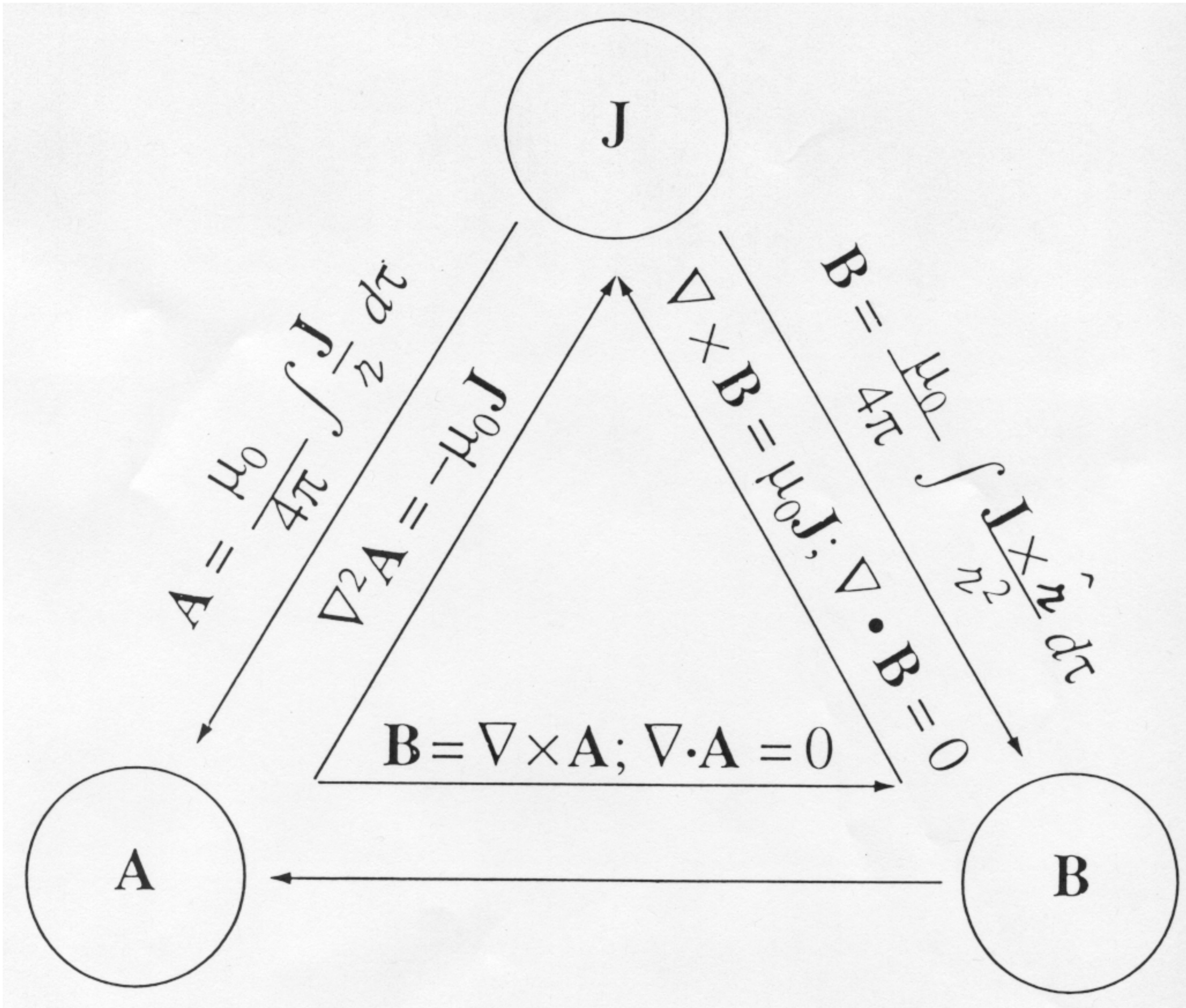




Equations de Lorentz décrivent comment les champs agissent:

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Rappel: courant, champ et potentiel magnétostatique



Griffith, figure 5.48, page 240

La loi d'Ohm

Pour faire circuler un courant, une force doit être appliquée pour faire bouger les charges. Pour la plupart des matériaux, la vitesse des charges, et par conséquent la densité de courant sera proportionelle à la force $\vec{f}$ par unité de charge:

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

avec la conductivité σ. Son inverse est la résistivité $\rho = 1/\sigma$. Il ne faut pas confondre ces deux quantités avec les densités de charge volumique et superficielle malheureusement notées avec les mêmes symboles.

Conducteurs	Résistivité [Ωm]	Semicond./Isolateurs	Résistivité [Ωm]
Argent	1.59×10^{-8}	Eau de mer	4.4×10^{-2}
Cuivre	1.68×10^{-8}	Germanium	4.6×10^{-1}
Or	2.21×10^{-8}	Diamant	2.7
Aluminium	2.65×10^{-8}	Silicium	2.5×10^{3}
Fer	9.61×10^{-8}		
Mercure	9.58×10^{-7}	Eau pure	2.5×10^{5}
Nickel/Chrome	1.00×10^{-6}	Bois	$10^{8} - 10^{11}$
Manganèse	1.44×10^{-6}	Verre	$10^{10} - 10^{14}$

Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press 1997

La loi d'Ohm

Les métaux sont excellents conducteurs, une minuscule force suffit pour faire circuler un courant. Cette force peut en principe être de n'importe quel nature. Pour ce cours, on considère la force électromagnétique:

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

On verra que la vitesse des charges est relativement petite, et sauf s'il y a des importants champs magnétiques externes, la densité de courant suit la loi d'Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

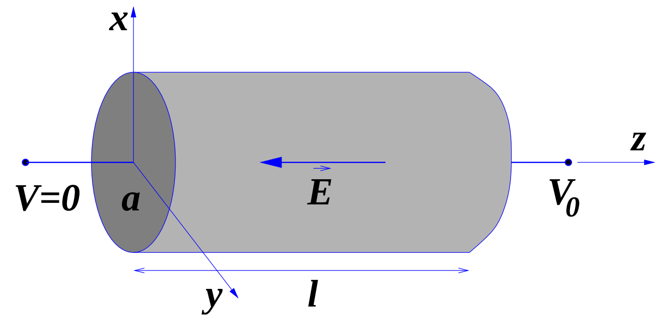
Dans la discussion de l'électrostatique on avait constaté, que le champ électrique était zéro partout dans un conducteur, par conséquent $\vec{J} = 0$. Ici, dans le cas non-statique, ce n'est pas le cas, parce qu'on permet à un flux de charges de s'établir, et on maintient le champ électrique par l'extérieur. Pour un conducteur idéal tout de même, $\sigma \to \infty$ et le champ à l'intérieur du conducteur est négligeable même si un courant passe. Pour cette raison on traite souvent les conducteurs qui amènent un courant, par exemple dans un circuit électrique, comme des équipotentiels. Les résistances, par contre, sont fabriquées avec un matériau de faible conductivité.

Exemple: Résistance cylindrique

Une résistance cylindrique de section a et longueur l est fabriqué avec un matériau de conductivité σ. Si le potentiel est constant sur la section à chaque extrémité, et si la différence de potentiel est V_0, quel est le courant qui passe?

Nous calculons le potentiel, qui suit une équation de Laplace. Si nous le spécifions sur toutes les surfaces, ou si nous spécifions sa dérivée normale, le potentiel sera connu partout.

Mettons $V = 0$ pour la section à gauche et $V = V_0$ á droite. Sur la surface cylindrique, on a $\vec{J} \cdot \hat{\vec{n}} = 0$, parce le seul courant passe de gauche à droite. Par conséquent, $\vec{E} \cdot \hat{\vec{n}} = 0$, et $\partial V / \partial n = 0$.



Un potentiel qui respecte ces conditions aux bords est:

$$V(z) = \frac{V_0 z}{l}$$

Le théorème d'unicité garantit que ceci est la seule solution. Le champ est uniforme et le courant est continu:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{V_0}{l}\hat{\vec{z}} \quad \rightarrow \quad I = Ja = \sigma E a = \frac{\sigma a}{l} V$$

La loi d'Ohm

Cet exemple suggère que le courant d'une électrode à l'autre sera normalement proportionnel à la différence de potentiel entre eux:

$$V = IR$$

Ceci est une forme plus familière de la loi d'Ohm, avec la résistance R comme constante de proportionalité. La résistance dépend de la géométrie et des propriétés du matériau. Elle est mesurée en Ohm:

$$[R] = \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$$

Cette formule résulte directement de $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, et hérite de la condition que tout effet magnétique doit être négligeable. Démo 190

Pour courants continus et conductivité uniforme, on a:

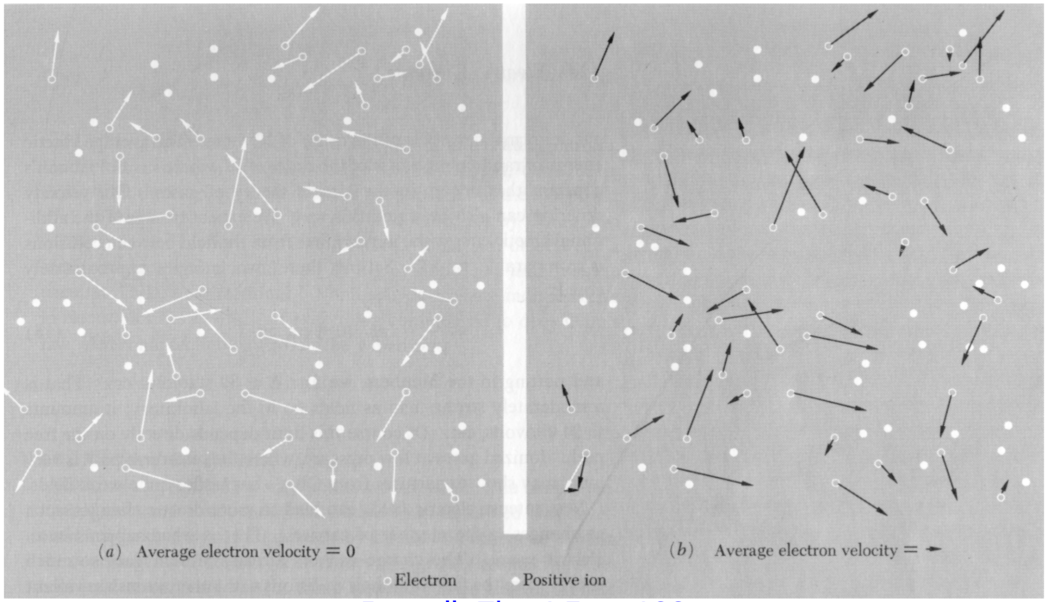
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

et $\partial\rho/\partial t = 0$, ce qui veut dire que $\rho = \rho(t = 0) = 0$. Toute charge résiduelle doit résider sur les surfaces, et la loi de Laplace règne à l'intérieur d'un matériau ohmique homogène.

La loi d'Ohm: Pourquoi marche-t-elle?

Que la densité de courant soit proportionelle au champ électrique, et le courant au potentiel, est étonnant. Pour des particules chargées libres, ceci n'est pas le cas: si le champ est constant, leur vitesse aumente constamment. La densité de courant $\rho\vec{v}$ n'est donc pas du tout constante.

Mais l'intérieur d'un conducteur ressemble plutôt à un gaz dense et chaud d'électrons dans un champ extérieur. Les électrons sont en mouvement thermique, avec une vitesse v_t qui dépend de la température et qui excède largement la vitesse moyenne v_d, induite par le champ électrique.



Purcell, Fig. 4.5, p. 123

Après une certaine distance moyenne λ, ils interagissent avec les ions positifs du métal et sont freinés. Ceci laisse un temps moyen de $t = \lambda / v_t$ entre deux collisions. Pendant ce temps, les électrons sont accélérés par le champ électrique à une vitesse de dérive moyenne:

$$v_d = \frac{at}{2} = \frac{qEt}{2m} = \frac{q\lambda}{2m}\frac{E}{v_t}$$

La loi d'Ohm: Pourquoi marche-t-elle?

Comme pour les gouttes de pluie dans l'atmosphère, les forces dissipatives causent une vitesse constante. Avec une densité ρ d'électrons mobiles, la densité de courant dans ce modèle est

$$\vec{J} = \rho q \vec{v}_d \propto \frac{\vec{E}}{v_t}$$

Ce modèle est certes naïf mais il prédit correctement la loi d'Ohm et le fait que normalement la conductivité diminue avec une température qui augmente. Ceci est dû au fait qu'une plus grande température augmente v_t et diminue le temps entre collisions.

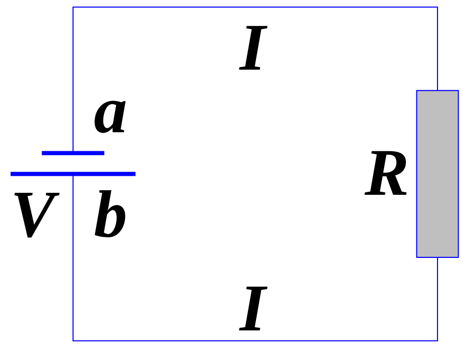
Un résultat de toutes ces collisions est qu'une partie de l'énergie électrique est convertie en chaleur. Le travail par unité de charge est V et la charge par unité de temps est I, par conséquent la puissance délivrée est:

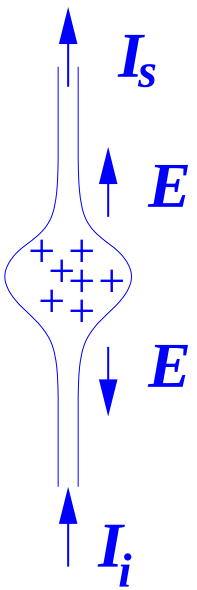
$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Cette loi s'appele la loi de Joule. L'unité de cette puissance est $[P] =$ Watt si l'on met I en Ampères (ou V en Volts) et R en Ohms.

La force électromotrice

Dans un circuit électrique le courant est le même partout, parce qu'aucun élément ne peut stocker ni livrer des charges. Ceci veut dire que tous les charges dans les divers conducteurs et résistances sont en mouvement continu et pratiquement synchronisé.





Le flux des charges est lissé par la force électrostatique due à la densité des charges mobiles: si les charges s'accumulent à un endroit, leur champ retarde le flux des suivantes et accélère celui des charges en avance. Il en suit que deux forces (par unité de charge) agissent:

$$\vec{f} = \vec{f}_s + \vec{E}$$

la force fournie par la source, $\vec{f}_s$, et l'électrostatique, $\vec{E}$.

La force électromotrice

La source du courant peut être de nature très diverse. Exemples:

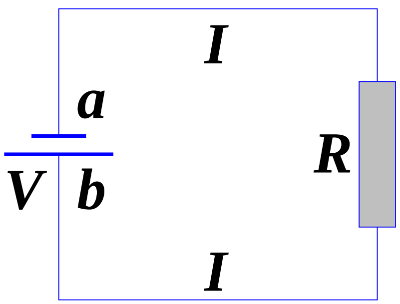
- la force chimique à l'intérieur d'une batterie,
- la pression mécanique sur un crystal piézoélectrique,
- la différence de température qui agit sur un thermocouple,
- la lumière qui touche une cellule photoélectrique etc.

L'effet moteur de la source est exprimé par l'intégrale autour du circuit:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}\, d\vec{l} = \oint (\vec{f}_s + \vec{E})\, d\vec{l} = \oint \vec{f}_s\, d\vec{l}$$

$\mathcal{E}$ est appelée la force électromotrice (fem), mais sa dimension est celle d'un travail par unité de charge et non pas d'une force.

Dans une source de courant idéale, sans résistance interne, la force nette sur les charges est zéro, c'est à dire $\vec{E} = -\vec{f}_s$. La différence de potentiel entre les deux pôles a et b est par conséquent:

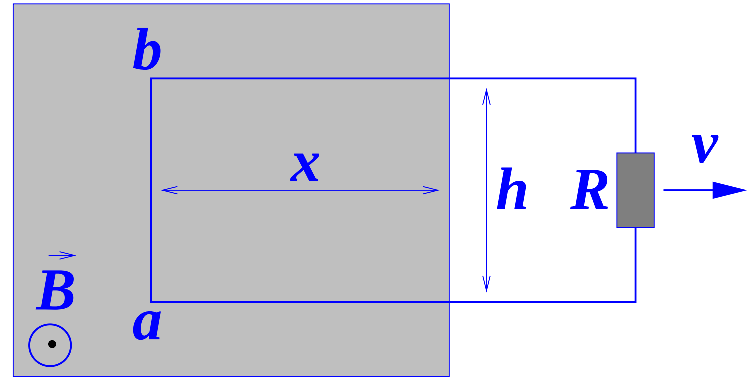


$$V = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{l} = \int_a^b \vec{f}_s\, d\vec{l} = \oint \vec{f}_s\, d\vec{l} = \mathcal{E}$$

Le rôle de la batterie est de maintenir la différence de potentiel et de fournir la fem. Le champ électrique résultant pousse les charges autour du circuit.

Le mouvement comme source de fem

Le mouvement mécanique est la source de fem par excellence. Dans les générateurs l'énergie mécanique est exploitée en poussant un fil à travers d'un champ magnétique, qui est normal à la direction du fil.



Pour une spire rectangulaire, qui est déplacée vers la droite avec une vitesse v, les charges mobiles dans le segment $a - b$ sentent une force magnétique verticale, $f_m = qvB$. Cette force génère un courant dans le sens opposé à l'aiguille d'une montre. La fem est:

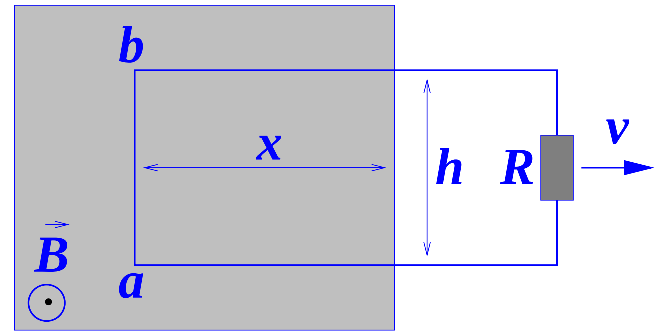
$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_m \, d\vec{l} = vhB$$

Les segments horizontaux ne contribuent pas, parce que la force est normale au fil.

Notez que l'intégrale autour du circuit est effectuée à un instant précis du temps, $t =$ const. Ceci veut dire que $d\vec{l}$ est vertical bien que la spire soit en train de passer à droite. Par conséquent, ce n'est pas le champ magnétique qui fournit le travail pour pousser les charges, mais la force qui tire sur la spire (voir leçon 8).

Le mouvement comme source de fem

Il y a une manière particulièrement élegante d'exprimer la fem dans une spire en mouvement. Le flux magnétique Φ qui traverse la spire est:



$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{a}$$

Pour la spire rectangulaire le flux est

$$\Phi = Bhx$$

En déplacant la spire vers la droite ($dx/dt < 0$), le flux diminue:

$$\frac{d\Phi}{dt} = Bh\frac{dx}{dt} = -Bhv \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Ceci est connu comme la règle du flux, et peut être appliqué à des spires de n'importe quelle forme. En effet la spire n'a même pas besoin de maintenir sa forme.

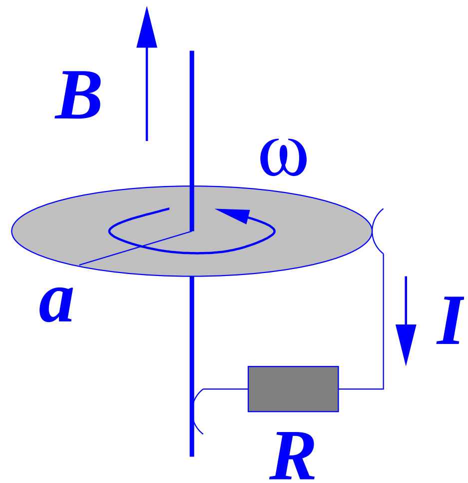
Démo 240/241

Comme d'habitude, le signe de la fem, comme celui du flux, est donné par la règle de la main droite. Le sens du courant définit la direction de $d\vec{a}$, le reste en suit.

(Contre-) Exemple: Disque en rotation

Parfois le racourci par la règle du flux ne peut pas être appliqué et on doit calculer directement avec la force de Lorentz. Ce sont les cas ou le parcours du courant n'est pas précisement défini. Un exemple est le dynamo.

Un disque métallique de rayon a tourne avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe parallèle à un champ magnétique homogène $\vec{B}$. Un circuit connecte l'axe avec la circonférence du disque par une résistance R. Trouver le courant dans le circuit.



La vitesse d'un point sur le dique à distance s de l'axe est $v = \omega s$. La force par unité de charge est $\vec{f}_m = \vec{v} \times \vec{B} = \omega s B \hat{\vec{s}}$. La fem et le courant sont:

$$\mathcal{E} = \int_0^a f_m ds = \omega B \int_0^a s\, ds = \frac{\omega B a^2}{2} \quad ; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

Les courants induits de ce type s'appelent courants de Foucault. Ils sont difficiles à calculer, mais faciles à mettre en evidence qualitativement.

Démo 246

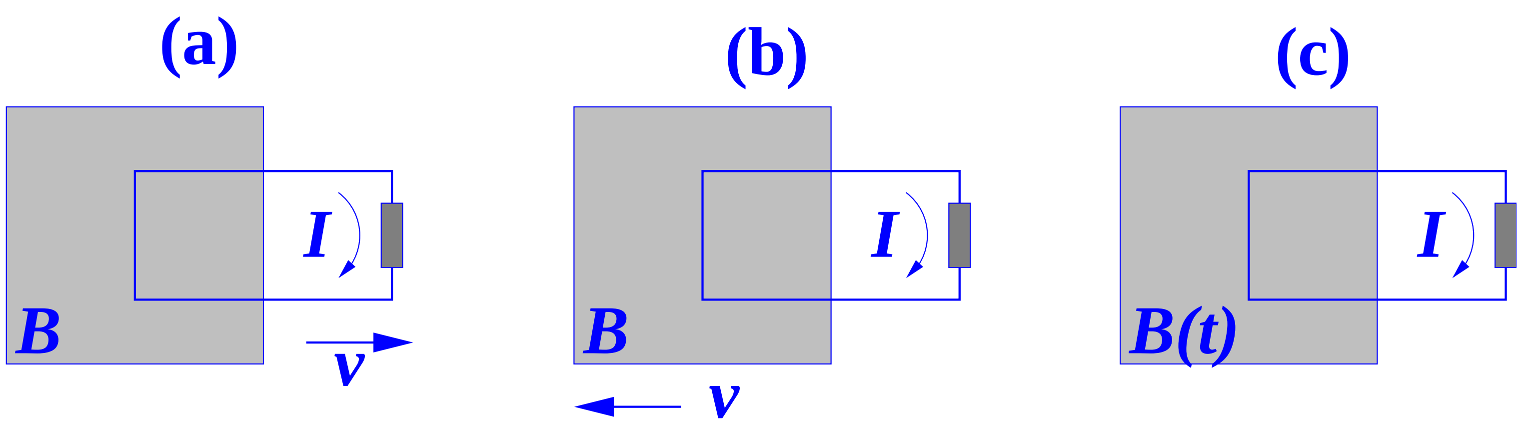
Induction

En 1831 Michael Faraday rapportait une série d'expériences, dont trois types peuvent être distingées:

(a) Une spire est tirée à travers un champ magnétique. Un courant passe par le circuit.

(b) La spire reste immobile, mais le champ est déplacé en tirant sur l'aimant. Le même courant en résulte.

(c) Spire et aimant restent immobiles, mais la magnitude du champ est variée. Encore une fois un courant passe. Démo 240



Pour les deux premiers cas, l'explication est claire: le mouvement fait changer le flux magnétique inclus dans la spire, et induit ainsi une fem $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$. Pour ceci seul le mouvement relatif compte.

La loi de Faraday

Sans mouvement de spire ou aimant, il n'y a pas de force de Lorentz sur les charges mobiles du conducteur. La force qui fait passer le courant doit par conséquent être de nature électrique. Faraday proposait alors qu'un champ magnétique variable induit un champ électrique. En effet l'expérience quantitative trouve qu'encore une fois la fem est entièrement donnée par le changement du flux:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{a}$$

Par conséquent l'expérience trouve la loi de Faraday, sous sa forme intégrale et différentielle:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{a} \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Elle complète la loi électro- et magnétostatique $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ en admettant des champs magnétiques variables. Elle crée des champs électriques rotationels.

La façon dont le flux change n'est pas importante, seule la vitesse du changement importe. La fem est toujours donné par $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$.

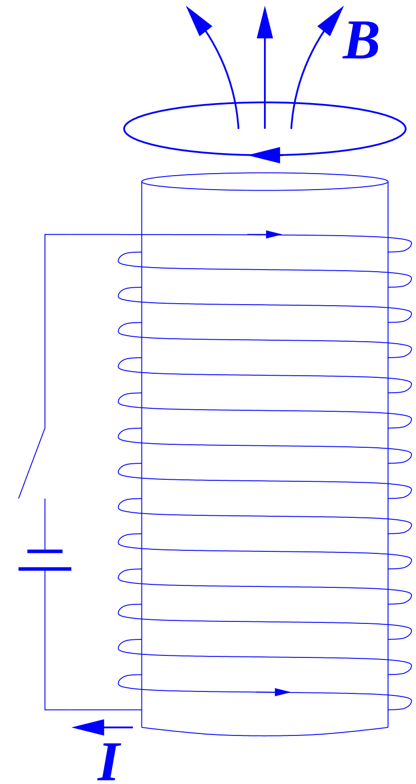
La règle de Lenz: l’anneau qui saute

Dans le cas du champ magnétique variable, la direction du champ peut poser problème. La règle de Lenz peut aider à la déterminer: la nature s’oppose au changement du flux magnétique. Selon cette règle, le courant induit essaye de réduire le changement de flux par son propre flux magnétique.

Exemple:

Soit un anneau métallique coaxial avec un solénoïde débranché. Quand on branche le courant du solénoïde, l’anneau saute violemment dans la direction du champ.

Avant de brancher le courant dans le solénoïde, le flux qui passe par l’anneau est zéro. Après qu’un flux vers le haut apparaisse, sa fem induit un courant de direction opposée à celle du courant dans l’aimant. Les deux courants opposés se repoussent et l’anneau saute.



Le champ électrique induit

Il y a donc deux manières de générer un champ électrique:

– par une distribution de charge selon la loi de Gauss:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

– par un champ magnétique variable, selon la loi de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En absense de toute charge, les équations de Maxwell deviennent en effet complètement symétriques:

$$\begin{array}{ccc} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla}\vec{E} = 0 & ; & \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \end{array}$$

Les champs électriques induits par $-\partial\vec{B}/\partial t$ ont par conséquent les mêmes propriétés que les champ magnétiques causés par une densité de courant $\mu_0\vec{J}$.

Le champ électrique induit

En particulier, si la symétrie du système le permet, nous pouvons utiliser les astuces de la loi d'Ampère sous sa forme intégrale:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc}$$

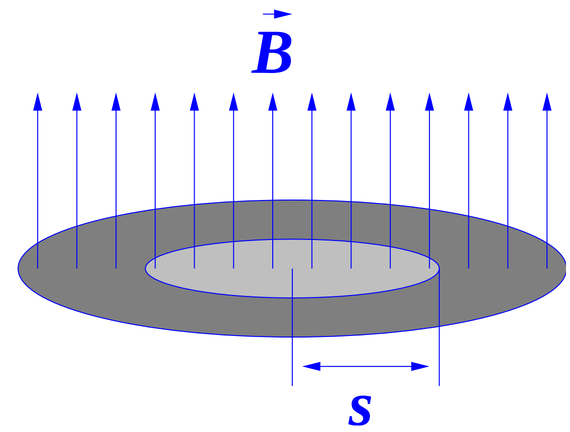
qui se présente ici comme la loi de Faraday sous sa forme intégrale:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

et le changement du flux magnétique par unité de temps prend le rôle du courant enlacé.

Exemple: champ variable dans région circulaire

Un champ magnétique uniforme pointe vers le haut, et remplit une région circulaire. Si $\vec{B}$ change avec le temps, quel est le champ électrique?



$\vec{E}$ pointe dans une direction tangentielle, tout comme le champ magnétique d'un courant linéaire. Intégrant le long d'un cercle de rayon s, on obtient avec la loi de Faraday:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = E(2\pi s) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\pi s^2 B(t)\right) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{s}{2}\frac{dB}{dt}\hat{\vec{\phi}}$$

Si $\vec{B}$ augmente avec le temp, $\vec{E}$ – vu du dessus – tourne dans la direction des aiguilles d'une montre.

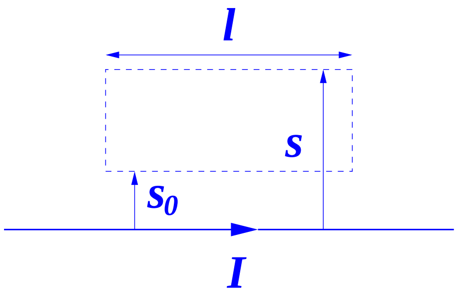
Magnétostatique avec champ variable?

Dans les arguments de cette section, on a fait intervenir une petite fraude: le champ magnétique est variable, mais on a tout de même appliqué l'appareil magnétostatique – c'est à dire les lois d'Ampère et de Biot-Savart – pour les calculer. Par conséquent, les résultats sont des approximations, d'autant plus exactes que le changement du champ est petit et que l'observateur se trouve proche de la source. On appelle ce régime quasistatique.

En pratique, les corrections sont négligeables sauf si le champ varie d'une manière extrèmement rapide. C'est uniquement quand on parle d'ondes électro-magnétiques et de la radiation, qu'il faut se faire des soucis sérieux concernant la violation du régime quasistatique.

Exemple: champ variable d'un fil infiniment long

Un fil infiniment long porte un courant $I(t)$ variant lentement. Déterminer le champ électrique induit, en fonction de la distance s du fil.



Dans l'approximation quasistatique, le champ magnétique est tangentiel à un cercle autour du fil:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi s}\hat{\vec{\phi}}$$

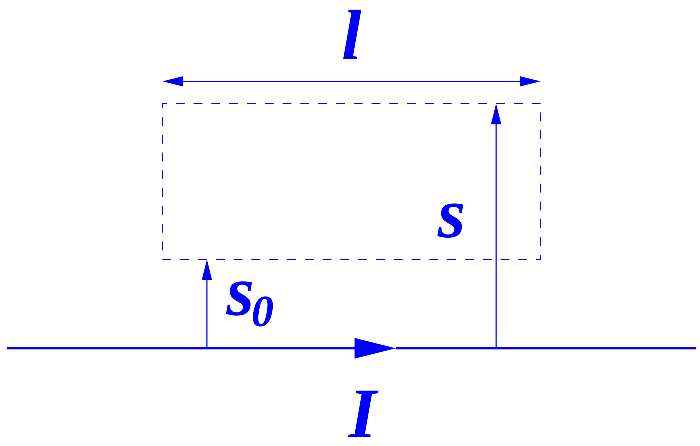
Comme le champ magnétique d'un solénoïde, le champ électrique induit est parallèle à l'axe. Un parcours d'intégration rectangulaire donne:

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E}\, d\vec{l} = E(s_0)l - E(s)l &= -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{a} \\
&= -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\int_{s_0}^{s}\frac{1}{s'}\, ds' = -\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}(\ln s - \ln s_0) \\
\vec{E}(s) &= \left[\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + k\right]\hat{\vec{z}}
\end{aligned}$$

avec une constante k qui peut être une fonction de t, mais non pas de s.

Exemple: champ variable d'un fil infiniment long

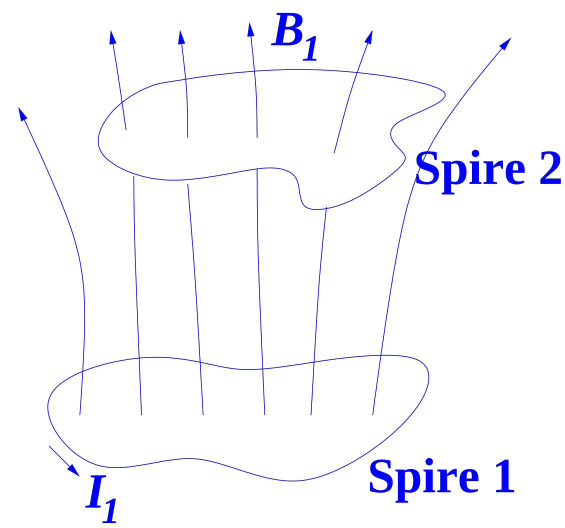
$$\vec{E}(s) = \left[\frac{\mu_0 l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s + k\right]\hat{\vec{z}}$$



Il est particulier à cette solution qu'elle diverge (lentement) pour $s \rightarrow \infty$. Ceci est dû au fait que l'on viole une des conditions du régime quasistatique: la proximité de l'observateur de la source, $s \ll c\tau$, avec une échelle de temps τ qui caractérise la vitesse avec laquelle le courant change. Cette condition est due au fait que le champ électromagnétique voyage avec la vitesse de la lumière c, et qu'il faut être sûr qu'il soit arrivé avant d'appliquer l'approximation quasistatique.

Inductance mutuelle

Supposons deux spires au repos. Si un courant continu I_1 passe par la spire no. 1, un champ magnétique $\vec{B}_1$ est produit. Une partie de ses lignes de champ passent par la spire no. 2, notons leur flux par Φ_2.



Le champ $\vec{B}_1$ peut être difficile à calculer, mais il est certainement proportionel à I_1 à cause de Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{\mathbf{r}}}}{\mathbf{r}^2}$$

Par conséquent, le flux de $\vec{B}_1$ par la spire no. 2 l'est aussi:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \, d\vec{a}_2 = M_{21} I_1$$

La constante M_{21} s'appelle l'inductance mutuelle des deux spires.

Inductance mutuelle

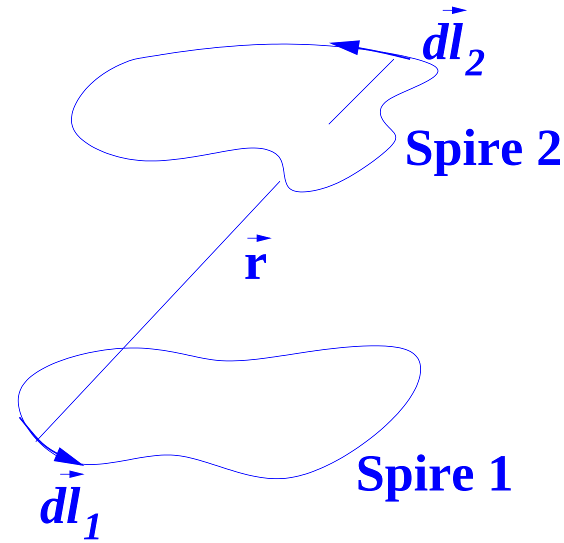
Une formule très révélatrice pour l'inductance mutuelle peut être derivée par le biais du potentiel vecteur:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \, d\vec{a}_2 = \int \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right) \, d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \, d\vec{l}_2$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{\mathbf{r}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\vec{l}_1}{\mathbf{r}} \right) \, d\vec{l}_2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \, d\vec{l}_2}{\mathbf{r}}$$



Ceci est la formule de Neumann. Elle n'est pas très pratique pour les calculs à cause de la double intégrale, mais elle révèle que:

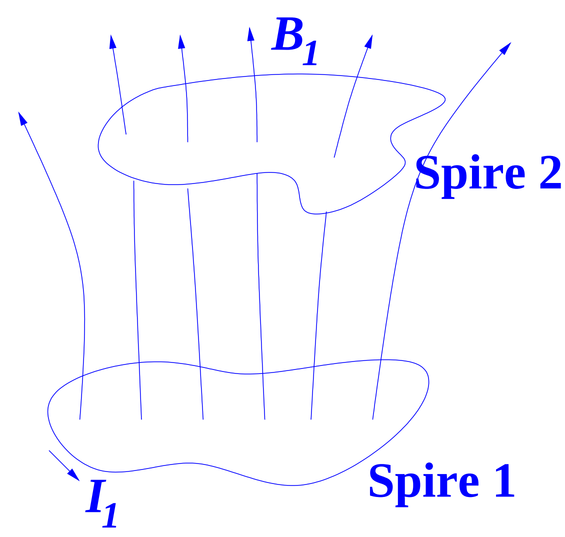
– M_{21} est d'une origine complètement géométrique, donnée par les tailles, formes et distances des deux spires;

– L'intégrale est complètement symétrique par rapport aux deux spires. Si l'on interchange les courants, l'inductance mutuelle reste inchangée:

$$M_{21} = M_{12} \equiv M$$

Rappel: inductance mutuelle

Supposons deux spires au repos. Si un courant continu I_1 passe par la spire no. 1, un champ magnétique $\vec{B}_1$ est produit. Une partie de ses lignes de champ passent par la spire no. 2, notons leur flux par Φ_2.



Le champ $\vec{B}_1$ peut être difficile à calculer, mais il est certainement proportionel à I_1 à cause de Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{\vec{\mathrm{r}}}}{\mathrm{r}^2}$$

Par conséquent, le flux de $\vec{B}_1$ par la spire no. 2 l'est aussi:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \, d\vec{a}_2 = M_{21} I_1$$

La constante M_{21} s'appelle l'inductance mutuelle des deux spires.

Rappel: inductance mutuelle

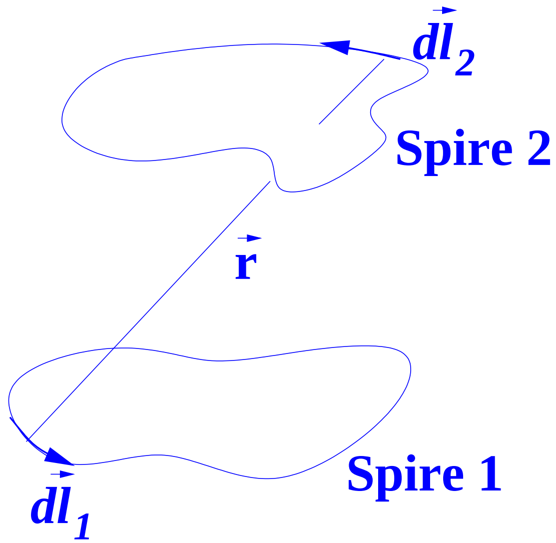
Une formule très révélatrice pour l'inductance mutuelle peut être dérivée par le biais du potentiel vecteur:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \, d\vec{a}_2 = \int \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right) \, d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \, d\vec{l}_2$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{\mathbf{r}}$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \left(\oint \frac{d\vec{l}_1}{\mathbf{r}} \right) \, d\vec{l}_2$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \, d\vec{l}_2}{\mathbf{r}}$$



Ceci est la formule de Neumann. Elle n'est pas très pratique pour les calculs à cause de la double intégrale, mais elle révèle que:

- M_{21} est d'une origine complètement géométrique, donnée par les tailles, formes et distances des deux spires;
- L'intégrale est complètement symétrique par rapport aux deux spires. Si l'on interchange les courants, l'inductance mutuelle reste inchangée:

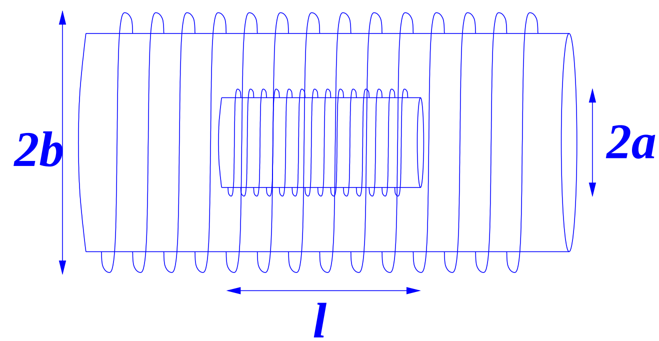
$$M_{21} = M_{12} \equiv M$$

Exemple: inductance mutuelle de deux solénoïdes

La symétrie de M veut dire que le flux magnétique qui passe par la boucle no. 2 à cause du courant dans la boucle no. 1 est identique à celui dans la boucle no. 1 si ce même courant passe par la boucle no. 2.

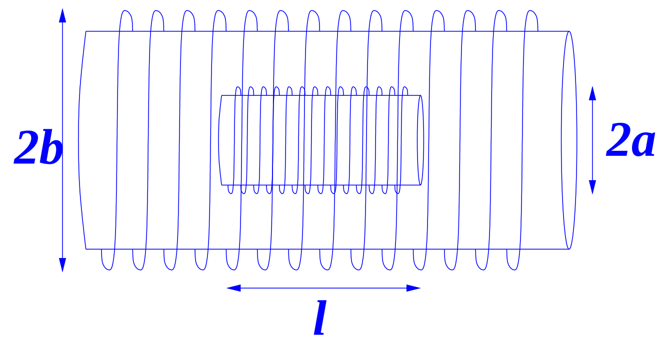
Exemple:

Un court solénoïde (longeur l, rayon a, n_1 boucles par unité de longueur) est inséré concentriquement dans un très long solénoïde (rayon b, n_2 boucles par unité de longueur). Un courant I passe par le court solénoïde. Quel est le flux magnétique qui passe par le long solénoïde?



Le champ du solénoïde court est compliqué aux deux extrémités. Il met un flux différent à travers chaque boucle du solénoïde long, et le flux total est difficile à calculer. Heureusement, la symétrie de l'inductance mutuelle permet de renverser le problème. On fait passer le courant I par le long solénoïde – qui a un champ homogène – et calcule le flux par le solénoïde court.

Exemple: inductance mutuelle de deux solénoïdes



Le champ du long solénoïde est:

$$B = \mu_0 n_2 I$$

Le flux qui passe par une seule boucle du solénoïde court est:

$$\Phi_i = B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$$

Le solénoïde court a un total de $n_1 l$ boucles et le flux total est:

$$\Phi = \mu_0 n_1 n_2 \pi a^2 l I$$

Ceci est aussi le flux causé par le dispositif inverse: si l'on passe le courant par le court solénoïde, le flux qui passe par le long est le même.

L'inductance mutuelle des deux solénoïdes est:

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

et ne contient que des caractéristiques géométriques.

Inductance ou self

Si maintenant on fait varier le courant dans une des deux spires ou bobines, le flux à travers l'autre variera aussi et une fem y sera induite:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

Le changement du courant dans une bobine entrainera un courant dans l'autre.

En effet, le courant dans la boucle no. 1 non seulement introduit un flux dans la boucle no. 2, mais aussi dans la boucle no. 1 elle-même! Et champ et flux sont encore une fois proportionels au courant:

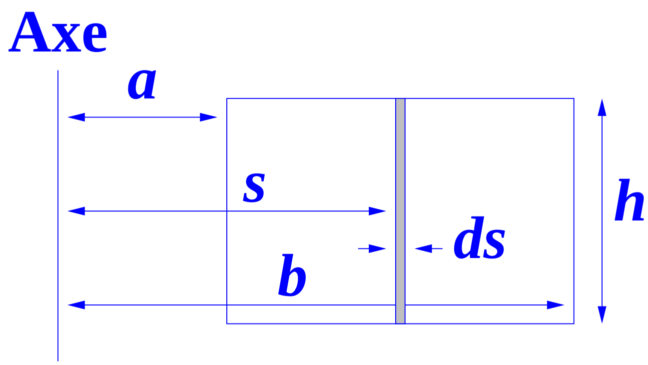
$$\Phi = LI$$

La constante de proportionalité, L est l'inductance, ou self, de la boucle. Comme l'inductance mutuelle, elle dépend uniquement de taille et forme de la boucle. Si le courant change, la fem induit dans la boucle elle-même est

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

L'inductance est mesurée en Henry: $[L] = \mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$.

Exemple: inductance d'un toroïde



Trouver l'inductance d'une bobine toroïdale de section rectangulaire (rayon intérieur a, extérieur b, hauteur h) qui a un total de N boucles.

Solution:

Le champ magnétique dans un toroïde est (voir 9.13):

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}$$

Le flux par une seule boucle est:

$$\Phi = \int \vec{B}\, d\vec{a} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \int_a^b \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Le flux total est N fois ce flux unitaire, et la self est:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Action d’une self sur un courant changeant

L’inductance, comme la capacité, est une quantité intrinsèquement positive. La règle de Lenz dicte que la fem induite a une direction qui s’oppose à tout changement de courant:

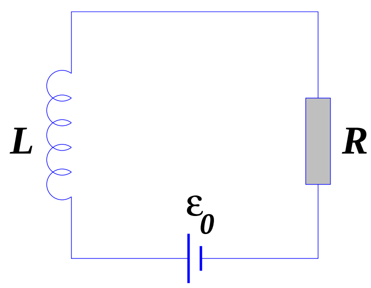
$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

Quand on essaie de changer le courant on doit travailler contre cette fem. Par conséquent, l’inductance dans un circuit électrique joue un rôle similaire à la masse dans un système mécanique. Plus L est grand, plus il est difficile de changer le courant dans le circuit. Plus grande est la masse d’un objet, plus il est difficile de changer sa vitesse.

Supposons qu’un courant I parcourt un circuit qui inclut une self. Quand on coupe le circuit, ce courant va vers zéro presque instantanément, avec un dI/dt important. Ceci cause une fem qui agit contre la diminution du courant. C’est pourquoi on tire souvent une étincelle quand on ouvre un contact électrique: l’induction électromagnétique essaie à tout prix de maintenir le contact.

Exemple: brancher et débrancher un circuit

Une transition moins dramatique se passe quand un circuit est branché. Dans ce cas, l'induction s'oppose à l'augmentation soudaine du courant et lisse sa croissance. Considérons un circuit qui inclut une batterie, qui fournit la fem $\mathcal{E}_0$ externe, une self L et une résistance R, toutes en série. Quel est le courant en fonction du temps?



La fem totale dans le circuit est celle de la batterie et celle fournie par la self. La loi d'Ohm nous dit que:

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = IR$$
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + ke^{-(R/L)t}$$

où k est déterminé par les conditions initiales. Si nous branchons le circuit à $t = 0$, avec $I(0) = 0$, la solution est:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left[1 - e^{-(R/L)t}\right]$$

Le courant s'approche asymptotiquement de la valeur $\mathcal{E}_0/R$. Le rapport L/R donne un temps caractéristique pour cette approche.

L'énergie dans le champ magnétique

Une certaine énergie est nécessaire pour faire passer un courant par un circuit:

- Une partie de l'énergie est dissipée dans les résistances ohmiques du circuit. Cette partie est irrécupérablement perdue. Elle est proportionelle au temps pendant laquelle on maintient le courant continu.
- Une autre partie doit être dépensée lors du branchement du circuit uniquement, pour lutter contre la fem des inductances. Ceci est une énergie fixe, qui peut être récupérée lors du débranchement du circuit.

Cette seconde partie est stockée dans le champ magnétique de la self.

Le travail par unité de charge contre la fem de la self est $-\mathcal{E}$. Comme la charge passant par le fil par unité de temps est I, le travail par unité de temps, et le travail total sont:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E} I = L I \frac{dI}{dt} \qquad \rightarrow W = \frac{1}{2} L I^2$$

Il est indépendant du temps que l'on met pour approcher la valeur finale du courant. Uniquement l'inductance L, donnée par la géométrie du circuit, est importante.

L'énergie dans le champ magnétique

Nous pouvons reécrire ce travail en termes du champ magnétique qui intervient, et le généraliser pour les densités de courant volumiques. Nous rappelons que le flux magnétique à travers de la self est:

$$LI = \Phi = \int_{\mathcal{S}} \vec{B}\, d\vec{a} = \int_{\mathcal{S}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) d\vec{a} = \oint_{\mathcal{P}} \vec{A}\, d\vec{l}$$

où $\mathcal{P}$ est le périmètre de la self et $\mathcal{S}$ la surface délimitée par $\mathcal{P}$. Pour le travail il en suit que

$$W = \frac{1}{2} I \oint_{\mathcal{P}} \vec{A}\, d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{P}} \vec{A} \cdot \vec{I}\, dl$$

Pour les densités de courant il est évident que ceci se généralise à:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J}\, d\tau$$

Nous éliminons d'abord la densité de courant par la loi d'Ampère:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\, d\tau$$

L'énergie dans le champ magnétique

En appliquant $\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B}^2 - \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ et intégrant par parties:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2\, d\tau - \int \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\, d\tau\right] = \frac{1}{2\mu_0}\left[\int_{\mathcal{V}} B^2\, d\tau - \oint_{\mathcal{S}} \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\, d\vec{a}\right]$$

où $\mathcal{S}$ est la surface limitant le volume $\mathcal{V}$. Si nous élargissons le volume d'intégration à tout l'espace, le deuxième terme disparait, car $\vec{A}$ et $\vec{B}$ tendent vers zéro loin de la source. L'énergie est donc donnée par le premier terme, avec une intégrale qui porte sur tout l'espace:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d\tau$$

L'énergie par unité de volume stockée dans un champ magnétique est $B^2/2\mu_0$.

Bien que le champ magnétique ne puisse pas effectuer du travail, il faut du travail électrique pour faire passer un courant et générer le champ magnétique. La symétrie entre le champ électrique et magnétique est donc parfaite en ce qui concerne l'énergie:

$$W_E = \frac{1}{2}\int (V\rho)\, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\, d\tau \quad ; \quad W_B = \frac{1}{2}\int (\vec{A} \cdot \vec{J})\, d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d\tau$$

Rappel: Equations de Maxwell et de Lorentz

Les équations de Maxwell décrivent comment les champs électriques et magnétiques sont produits:

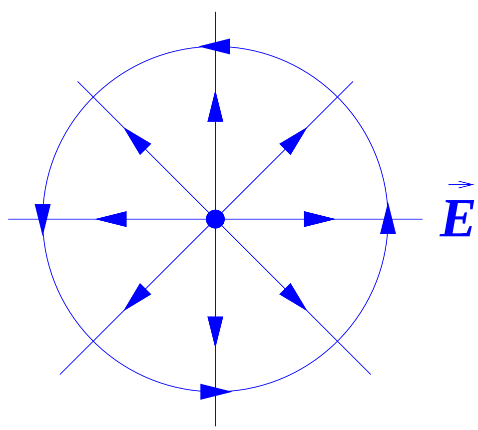
$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

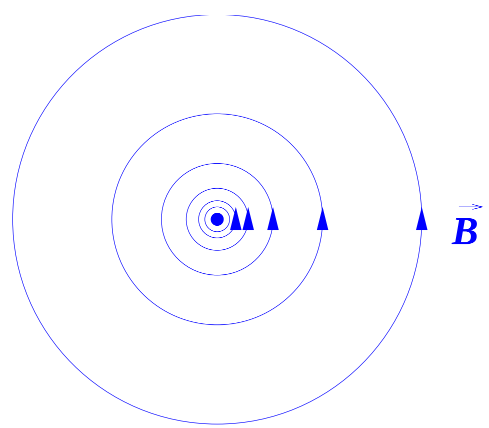
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La situation avant Maxwell correspond à notre niveau de discussion jusqu'ici:

$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$ (loi de Gauss) $\qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (loi de Faraday) $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ (loi d'Ampère)





Le problème de la loi d'Ampère

Situation avant Maxwell:

$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$ (loi de Gauss) $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (loi de Faraday) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (loi d'Ampère)

L'ensemble des équations électromagnétiques avant Maxwell était inconsistant. En particulier, il n'assure pas que la divergence des rotationels est zéro partout:

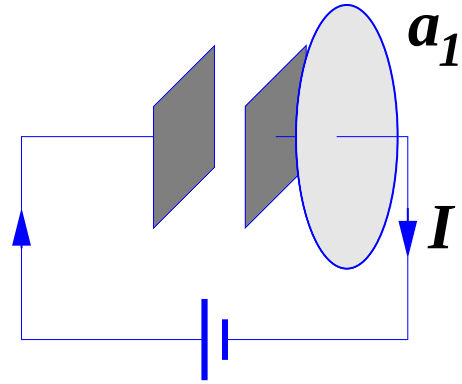
$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\vec{B}\right) = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{\nabla}\vec{J}\right)$$

Pour le champ électrique, tout va bien: comme $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$, la divergence de son rotationel est zéro partout. Mais la divergence du rotationel pour le champ magnétique est zéro uniquement si ce dernier est généré par des courants continus, qui ont $\vec{\nabla}\vec{J} = 0$. Mais en général, la conservation de la charge éléctrique réclame uniquement la continuité:

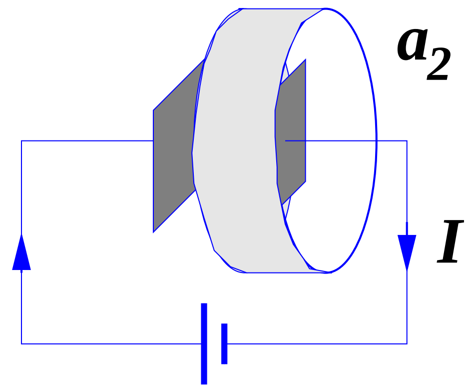
$$\vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Quand un circuit inclut des éléments qui permettent de stocker des charges, la loi d'Ampère est en difficulté grave.

Exemple: chargement d’un condensateur



Pour mettre en évidence ce problème on considère un circuit qui relie une batterie à un condensateur. Quand on branche le circuit, un courant passe et les plaques du condensateur se chargent jusqu’à ce que leur champ électrique compense la fem fournie par la batterie. A ce point, le courant s’arrête.



Considérons maintenant le champ magnétique autour du fil qui relie la batterie au condensateur. Si nous le calculons par une surface, la loi d’Ampère donne:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc}$$

La réponse dépend du fait si, oui ou non, un courant passe par la surface. Mais dans notre circuit, nous pouvons avoir deux surfaces qui ont le même bord: l’une, a_1, percée par le fil, inclut un courant; l’autre, a_2, passant entre les plaques du condensateur, n’en inclut pas! La réponse donnée par la loi d’Ampère est inconsistante. Ceci n’est pas étonnant: nous l’avons dérivée de la loi de Biot-Savart, qui se limite aux cas magnétostatiques.

Completer la loi d'Ampère

Pour complèter la loi d'Ampère, il nous faut un terme additionnel qui assure que $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ sous n'importe quelle condition. La loi de continuité, qui découle de la conservation de la charge électrique, nous indique le chemin. Le terme fautif est

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0\left(\vec{\nabla}\vec{J}\right)$$

$$\vec{\nabla}\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\vec{\nabla}\vec{E}\right) = -\vec{\nabla}\left(\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Par conséquent, la consistence réclame un champ $\vec{B}$ construit à partir d'un rotationel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

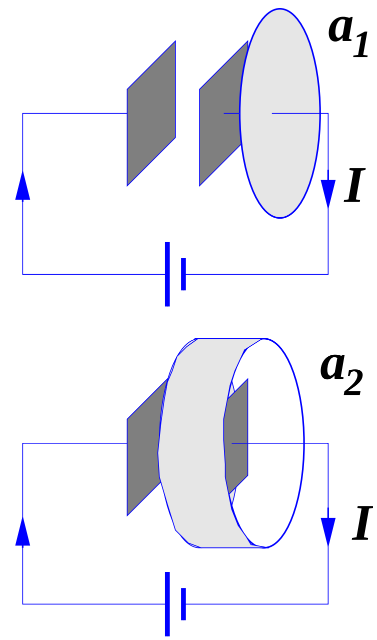
Un champ électrique variable induit un champ magnétique. L'expérience confirme cette conclusion.

Maxwell lui-même a introduit le terme courant de déplacement:

$$\vec{J}_d \equiv \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mais en réalité cette grandeur ne correspond à aucun courant.

Exemple: chargement d'un condensateur



Le terme additionnel résout notre problème d'inconsistance dans le circuit avec condensateur. Dans la limite d'une faible distance entre les plaques, le champ à l'intérieur du condensateur est

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Q}{a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 a}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 a}I$$

où a est la surface des plaques.

La loi d'Ampère complétée donne:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_{inc} + \mu_0\epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{a}$$

Appliquée à la surface a_1, $E = 0$ et $I_{inc} = I$. Si l'on utilise par contre la surface cylindrique a_2, on a $I_{inc} = 0$ et $\int (\partial \vec{E}/\partial t)\, d\vec{a} = I/\epsilon_0$. La somme des deux termes est toujours la même.

Les équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{E} &= \tfrac{1}{\epsilon_0}\rho && \text{(loi de Gauss)}\\
\vec{\nabla}\vec{B} &= 0 &&\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \text{(loi de Faraday)}\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} && \text{(loi d'Ampère + complément de Maxwell)}
\end{aligned}$$

Le complément de Maxwell laisse le potentiel vecteur magnétique inchangé par rapport à la magnétostatique:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Par contre, la relation entre les potentiels et le champ électrique est modifiée par la loi de Faraday. En termes de $\vec{A}$, celle-ci devient:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) \quad\rightarrow\quad \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Voici alors une quantité sans rotationnel que l'on peut l'écrire comme le gradient d'un potentiel scalaire:

$$\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla}V \quad\rightarrow\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

L'électrodynamique dans le vide

Equations de Maxwell et potentiels électromagnétiques:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad ; \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Vous remarquez le manque de symétrie entre les lois pour les champs électrique et magnétique. Le champ électrique a des source stationnaires, les charges. Le champ magnétique est causé par ces mêmes charges électriques, mais uniquement quand elles sont en mouvement. La loi de Lorentz:

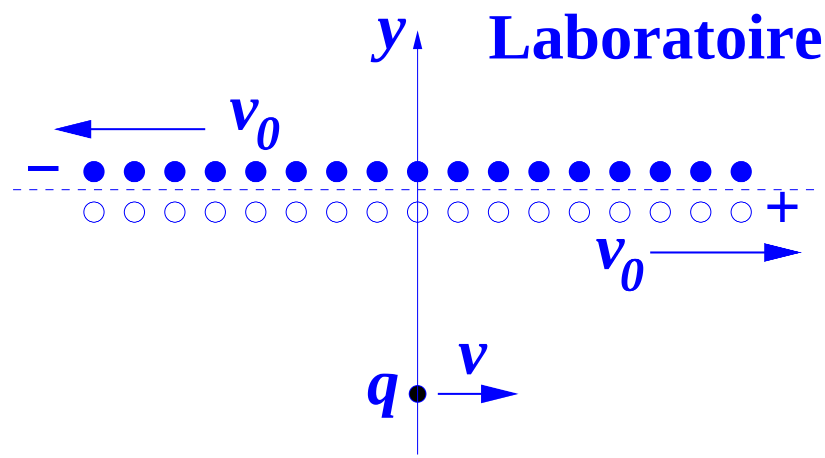
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

a la même asymétrie. La force électrique agit sur toutes les charges, la force magnétique uniquement sur celles en mouvement. La force générée par les champs est toutefois d'une égale magnitude: la constante de couplage – la constante qui mesure “la force du champ” – est la charge électrique q dans les deux cas.

Les équations de Maxwell et la relativité

Le concept des charges en mouvement n'est pas indépendant du système de référence. Une distribution de charges stationnaire devient un courant continu quand elle est observée d'un autre système inertiel. En même temps, le champ magnétique apparait et prend part dans la détermination de la trajectoire d'une particule en mouvement.

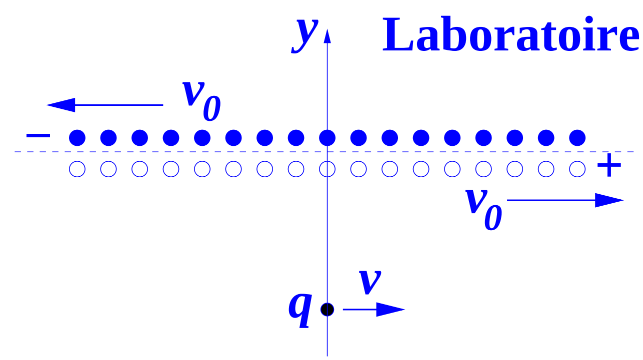
Pour voir cela on prend pour exemple un système de deux courants linéaires égaux, l'un porté par des charges positives, l'autre par des charges negatives, et qui ont une vitesse opposée.



Ceci ne correspond pas à la situation normale dans un fil, où les charges libres sont des électrons et les ions restent au repos. Nous choisisson une situation plus symétrique, parce qu'ici il n'y a pas de système référentiel où toutes les charges sont au repos.

Les équations de Maxwell et la relativité

Dans le système référentiel du laboratoire, les densités linéaires des deux charges sont égales, $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$, et suffisemment grandes que nous pouvons considérer les courants comme continus. Les vitesses, $\pm v_0$, des deux chaines de charges sont égales et opposées. Il en suit que le fil reste inchargé et qu'il n'y a pas de champ électrique.



Par contre, un champ magnétique est causé par les deux courants. En leçon 9 nous avons calculé ce champ pour un courant donné, $I = 2v_0\lambda$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\vec{\Phi}} = \frac{\mu_0 v_0 \lambda}{\pi y}\hat{\vec{\Phi}}$$

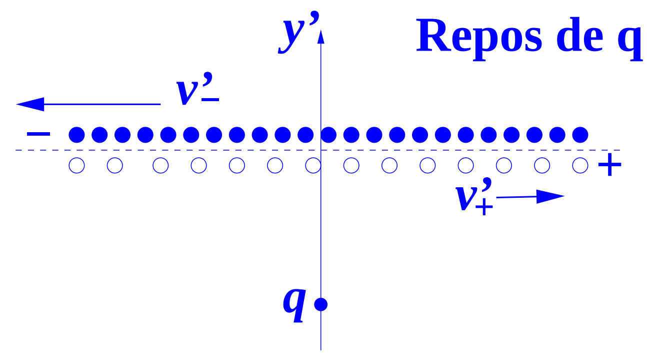
La force sur une charge q qui se déplace vers la droite avec vitesse v est:

$$\vec{F} = qv\frac{\mu_0}{\pi}\frac{v_0\lambda}{y}\hat{\vec{y}}$$

Notons que la densité de charge dans les systèmes de repos des courants est moindre que dans le laboratoire, $\lambda/\gamma_0 = \lambda\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$, à cause de la contraction des longueurs.

Les équations de Maxwell et la relativité

Changeons maintenant à un système référentiel où la charge q est au repos, décrit par des coordonnées (x', y', z'). Dans ce système, le champ magnétique n'agit plus. Les charges positives et négatives du courant ont des vitesses données par le théorème d'addition relativiste:



$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 v/c^2} \quad ; \quad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 - v_0 v/c^2}$$

La densité de charges λ' dans ce nouveau système est déduite de celle dans leur système de repos respectif:

$$\lambda'_+ = \gamma_+ \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad ; \quad \lambda'_- = \gamma_- \frac{\lambda}{\gamma_0}$$

avec les $\gamma_\pm = 1/\sqrt{1 - v'^2_\pm/c^2}$ qui correspondent aux deux vitesses relatives. On note avec surpris que dans le système de repos de la charge q, ces deux densités correspondant aux deux courants ne sont plus égales.

Les équations de Maxwell et la relativité

Le fil aquiert une densité de charge nette qui n'existe pas dans le laboratoire:

$$\lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} \underbrace{(\gamma_+ - \gamma_-)}_{-2v_0 v \gamma_0 \gamma / c^2} = -2\lambda\gamma \frac{v v_0}{c^2}$$

Il apparait par conséquent comme un fil uniformement chargé. En leçon 1 nous avons calculé le champ électrique d'un tel fil, et la force électrostatique qui en résulte:

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda'}{y'} \hat{\vec{y}'} = \gamma v \frac{1}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v_0 \lambda}{y} \hat{\vec{y}'} \quad ; \quad \vec{F}' = \gamma q v \frac{1}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v_0 \lambda}{y} \hat{\vec{y}'}$$

Retransformons cette force électrostatique dans le laboratoire, avec $F_{||} = F'_{||}$ et $F_\perp = F'_\perp / \gamma$:

$$\vec{F} = q v \frac{1}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v_0 \lambda}{y} \hat{\vec{y}}$$

Cette force électrostatique est identique à la force magnétique que l'on avait calculé dans le laboratoire, étant donné que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Les champs électrique et magnétique sont en réalité la même chose, leur distinction dépend uniquement du système de référence.

Les équations de Maxwell et la relativité

Les lois de l'électrodynamique sont indépendantes d'un changement de système inertiel. Dans notre cas, où un champ magnétique s'est transformé en champ électrique, ceci indique que les champs électrique et magnétique ne sont pas fondamentalement différents: ils sont deux aspects du champ électromagnétique.

La notation des quadrivecteurs met en évidence la complémentarité des aspects électrique et magnétique. Les potentiels (voir leçon 9) et les densités de charge et de courant forment des quadrivecteurs:

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} V/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad ; \quad J^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

Le potentiel donne naissance à un tenseur antisymétrique du champ électromagnétique, qui réunit les champs électrique et magnétique dans une seule grandeur:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Les équations de Maxwell et la relativité

Avec ce tenseur, les équations de Maxwell dans le vide prennent leur forme la plus compacte:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu}(ct,\vec{x}) \;=\; \mu_0 J^\nu(ct,\vec{x})$$

On triche un peu ici, en utilisant la convention de Einstein pour implicitement sommer sur les mêmes indices covariants et contravariants, μ. Cela a l'air encore plus compact. Malgré cela il restent quatre équations pour la génération des champs électromagnétiques.

On constate tout de même, que cette équation contient toute l'électrodynamique. Ne faisant intervenir que des quadrivecteurs – qui se transforment comme le quadrivecteur de l'espace-temps $x^\mu = (ct,\vec{x})$ – les équations de Maxwell dans le vide sont manifestement covariantes: l'électrodynamique ne change pas quand on passe d'un système inertiel à l'autre.

Par conséquent, et contrairement à la théorie Newtonienne de la gravitation, les équations de Maxwell gardent leur validité même dans un régime relativiste, c'est à dire pour des vitesses qui s'approchent à la vitesse de la lumière.