

CHAPITRE 1

L'ÉLECTROSTATIQUE

1.1 Introduction

La charge est une propriété de la matière qui lui fait produire et subir des effets électriques et magnétiques. On distingue :

- l'électrostatique qui est l'étude des effets électriques créés par des charges au repos;
- l'électromagnétisme qui est l'étude des phénomènes électriques et magnétiques (les phénomènes magnétiques impliquent généralement des charges électriques en mouvement).

1.2 La charge électrique

On distingue deux types de charges électriques: les charges positives et les charges négatives. L'expérience montre clairement que :

- les charges de même signe se repoussent ;
- les charges de signes contraires s'attirent.

La matière est constituée d'atomes (de rayon $\approx 10^{-10}$ m), chaque atome étant formé d'un noyau compact (de rayon $\approx 10^{-15}$ m) contenant des protons de charge positive et des neutrons électriquement neutres dont le rôle est essentiel à la stabilité des noyaux. Autour du noyau, des électrons de charges négatives constituent des nuages de formes diverses. Un atome neutre possède un même nombre d'électrons et de protons. Par conséquent, la matière est électriquement neutre.

On peut charger un corps entre autres par frottement. La proportion des atomes de la surface d'un corps qui perdent ou gagnent un électron est de l'ordre de 1 sur 10^5 .

L'unité de la charge électrique est le coulomb (C)

La charge électrique n'existe qu'en quantités discrètes : **elle est quantifiée**. Dans le cadre de ce cours, la grandeur de la charge élémentaire est celle de l'électron :

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Dire que la charge est quantifiée équivaut à affirmer que toute charge électrique Q s'exprime comme un multiple entier de e :

$$Q = n e \quad \text{où } n \text{ est un entier}$$

L'un des principes fondamentaux qui concerne la charge électrique est celui de la conservation de la charge qui s'applique aux **systèmes isolés** :

La charge totale d'un système isolé reste constante

1.3 Conducteurs et isolants

Un **conducteur** est un matériau comportant une certaine concentration d'électrons libres susceptibles de se déplacer facilement sous l'effet d'un champ électrique (pour créer un courant, par exemple). Les métaux et les solutions ioniques sont des milieux conducteurs. Un gaz ionisé peut également être considéré comme un milieu conducteur.

Dans un **isolant**, il y a très peu d'électrons libres. Ils sont fortement liés à des sites moléculaires donnés (contrairement à un bon conducteur) et il faut leur donner beaucoup d'énergie pour les libérer et générer un courant électrique. Le caoutchouc, les plastiques, le verre, la soie et le bois sont des isolants.

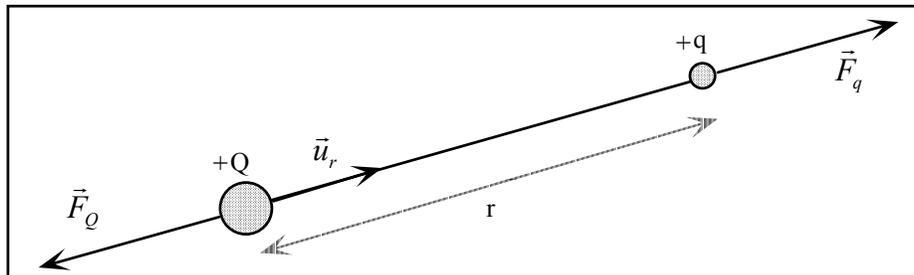
Remarque : La quantité d'électrons libres est précisément ce qui distingue les conducteurs des isolants

Un **semi-conducteur** se comporte comme un isolant lorsqu'il est très pur, mais on peut modifier son pouvoir conducteur en le dopant, c'est-à-dire en y ajoutant des impuretés dans des proportions bien déterminées. Le germanium, le carbone et le silicium sont des semi-conducteurs.

1.4 Loi de Coulomb

La loi de Coulomb exprime la force entre 2 charges ponctuelles ou que l'on peut considérer comme telles. Il a fait la démonstration expérimentale que cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance entre elles. Sa connaissance de la loi d'attraction gravitationnelle entre deux masses l'a amené à déduire que cette force était proportionnelle au produit des charges en présence. De toute façon, il n'était pas possible de mesurer précisément une charge électrique à cette époque.

Dans la figure, on a illustré le cas de 2 charges ponctuelles, la charge source $+Q$ et la charge témoin $+q$. Tel qu'illustré, les forces sur les charges sont répulsives dans ce cas.



$$\begin{cases} \vec{F}_q = k \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r \\ \vec{F}_Q = -k \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{F}_Q = -\vec{F}_q$$

Dans l'expression des forces, la valeur de la constante k est

$$k = 9 \times 10^9 \text{ (N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \text{)}$$

Elle s'exprime souvent sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

où

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \left(\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right)$$

est la constante de permittivité du vide.

La comparaison entre les forces électrique et gravitationnelle entre un électron et un proton dans le cas de l'atome d'hydrogène révèle que la force électrique est très nettement dominante. C'est cette force qui explique la stabilité des atomes, du moins en ce qui concerne la liaison entre les électrons et le noyau. Dans les applications concernant les faisceaux de particules chargées (électron, proton, particule alpha), la force électrique sera également dominante, de sorte qu'on pourra négliger la force gravitationnelle

D'autre part, si on calcule la force électrique entre deux protons situés de part et d'autre du diamètre d'un noyau d'atome de fer, on trouve environ 10 N , ce qui est considérable étant donné la masse des protons ($1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$). Le noyau devrait donc éclater sous l'effet des

forces électriques de répulsion entre les protons. Pour expliquer la stabilité des noyaux, on est naturellement amené à postuler l'existence des forces nucléaires (c'est l'une des conséquences directes de l'interprétation de la loi de Coulomb dans le contexte des noyaux des atomes). L'ordre de grandeur de cette force est d'environ 100 fois celle de Coulomb, ce qui explique la stabilité des noyaux des atomes. Les neutrons jouent un rôle important dans cette force.

1.5 Le principe de superposition

On utilise le principe de superposition pour calculer la force résultante sur une charge témoin q due à un ensemble de charges sources $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n$.

La force sur q due à Q_i est donnée par :

$$\vec{F}_{q,Q_i} = k \frac{qQ_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Or, le principe de superposition s'applique aux forces, en particulier pour le calcul de la force résultante, d'où :

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{q,Q_i} = \sum_{i=1}^n k \frac{qQ_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

Dans la plupart des exercices du livre de référence, il faut se donner un système d'axes de référence pour exprimer les composantes de chacune des forces et ensuite obtenir l'expression vectorielle de la force résultante sur une charge donnée. Lire les exemples 1.1, 1.2, et 1.3 du livre de référence.

1.6 Exercices à faire dans le chapitre 1 du livre de référence

(Nouvelle ou ancienne édition)

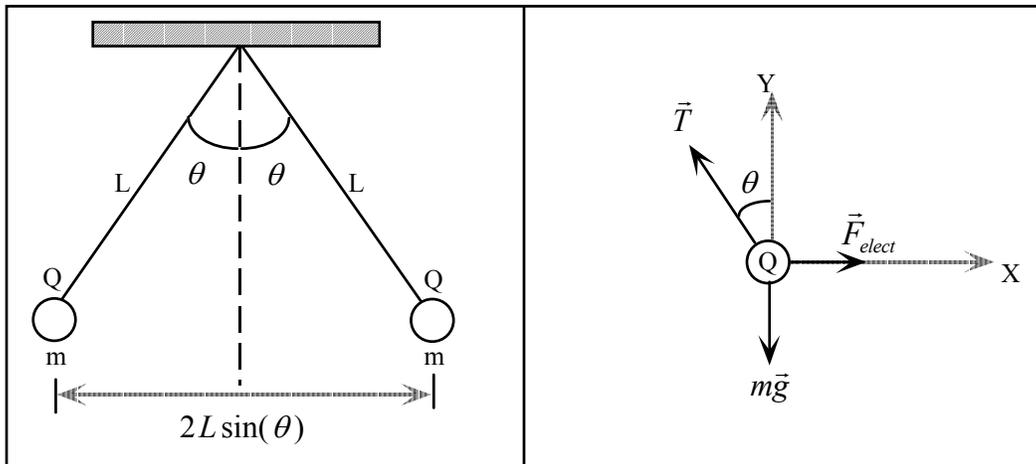
Exercices # 3, 5, 10, 11, 12, 16

Problèmes : 3, 6 et 10

1.7 Exercices résolus

Exercices 1-12

Les 2 sphères de la figure de gauche de la figure qui suit sont faites de matière isolante, identiques, de charges égales Q et de masses égales m . Du fait de leurs charges, celles-ci se repoussent de sorte que les fils de longueur L qui les retiennent font un angle θ avec la verticale. On demande l'expression de la charge Q des 2 sphères en fonction des autres paramètres (θ , m , L), sachant qu'elles sont en équilibre tel qu'illustré dans la figure de gauche.



Solution

La somme des forces sur chacune des sphères est nulle. Celles-ci sont représentées dans la figure de droite. Les conditions d'équilibre exprimées dans le système d'axes illustrés donnent les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{en X} : F_{elect} - T \sin(\theta) = 0 \\ \text{en Y} : T \cos(\theta) - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \sin(\theta) = F_{elect} \\ T \cos(\theta) = mg \end{cases}$$

De ces relations, on tire donc

$$\tan(\theta) = \frac{F_{elect}}{mg}$$

D'autres part, la loi de Coulomb permet d'exprimer la force électrique entre les sphères :

$$F_{elect} = \frac{kQ^2}{(2L \sin(\theta))^2}$$

Des 2 dernières égalités, on obtient le résultat cherché :

$$\begin{cases} \tan(\theta) = \frac{F_{elect}}{mg} \\ F_{elect} = \frac{kQ^2}{(2L \sin(\theta))^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{kQ^2}{(2L \sin(\theta))^2} = mg \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow Q = \pm \sqrt{\frac{4L^2 \sin^2(\theta) mg \tan(\theta)}{k}}$$

Problème 1.6

Deux petites sphères métalliques identiques et distantes de 3 cm s'attirent l'une l'autre avec une force de 150 N. On les relie provisoirement par un petit fil conducteur.

- Si elles se repoussent maintenant avec une force de 10 N, déterminez la charge initiale sur chacune des sphères.
- Déterminez la charge initiale sur chaque sphère si la force répulsive est de 150 N après les avoir mis en contact.

On suppose que la charge est uniformément répartie sur les petites sphères.

- Avant de mettre les sphères en contact, la force est attractive de sorte que le produit des charges est négatif. Alors, la loi de Coulomb permet de produire l'égalité suivante :

$$\frac{kQ_1 Q_2}{d^2} = -150 \quad (1)$$

où $d = 0,03$ m .

Après le contact, la charge sur chacune des sphères est égale du fait que les 2 sphères sont identiques. La charge sur chacune est donnée par :

$$Q'_1 = Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad (2)$$

Sachant que la force est alors attractive et valant 10 N, l'application de la loi de Coulomb donne l'égalité

$$\frac{k \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2} \right)^2}{d^2} = 10 \quad (3)$$

où $d = 0,03 \text{ m}$.

Les équations (1) et (3) peuvent être résolues pour déterminer la valeur de la charge initiale sur chacune des sphères (Q_1 et Q_2). Il suffit d'isoler Q_2 dans (1) et substituer dans (3) pour trouver une équation quadratique en Q_1 . Par suite, on trouve :

$$\begin{cases} Q_1 = \pm 3 \mu\text{C} & \text{avec } Q_2 = \mp 5 \mu\text{C} \text{ ou} \\ Q_1 = \pm 5 \mu\text{C} & \text{avec } Q_2 = \mp 3 \mu\text{C} \end{cases}$$

b) Avant de mettre les sphères en contact, la force est répulsive de sorte que le produit des charges est positif. Alors, la loi de Coulomb permet de produire l'égalité suivante :

$$\frac{k Q_1 Q_2}{d^2} = 150 \quad (4)$$

où $d = 0,03 \text{ m}$. Comme dans le cas précédent, après le contact, les charges sur chacune des sphères sont égales :

$$Q'_1 = Q'_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \quad (5)$$

Cependant, la force reste répulsive et a pour valeur 10 N. On a donc

$$\frac{k \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2} \right)^2}{d^2} = 10 \quad (6)$$

Les équations (4) et (6) permettent de déterminer la valeur des charges initiales. On trouve

$$\begin{cases} Q_1 = \pm 1,60 \mu C & \text{avec } Q_2 = \pm 9,35 \mu C \text{ ou} \\ Q_1 = \pm 9,35 \mu C & \text{avec } Q_2 = \pm 1,60 \mu C \end{cases}$$

CHAPITRE 2

LE CHAMP ÉLECTRIQUE

2.1 Introduction

La loi de Coulomb permet de calculer la force résultante d'un ensemble de charges ponctuelles sources sur une charge témoin donnée. Cependant, la notion de force implique dans ce cas l'interaction de deux charges électriques. Elle n'apporte pas une réponse satisfaisante à ce qui caractérise une charge électrique ou un corps portant une charge. Le concept de champ électrique est introduit, entre autres, pour apporter une réponse à cette question. Cette réponse se résume comme suit :

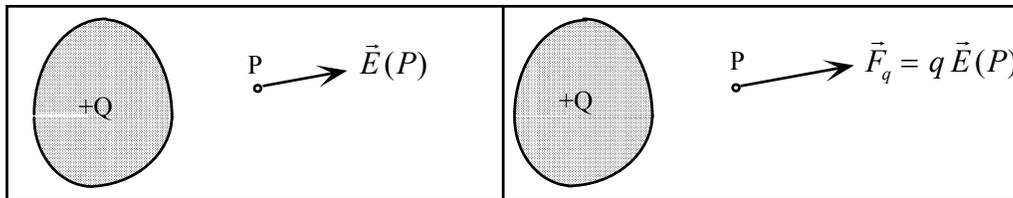
- Une charge électrique ou un corps portant une charge électrique produit dans son voisinage ce que nous désignerons par **champ électrique**. **De plus, il existe un rapport étroit entre la géométrie de la distribution des charges et la géométrie du champ.**
- La force électrique sur une charge témoin placée dans un champ électrique se déduit facilement si l'expression du champ électrique est connue. Il est possible, dans certains cas, de calculer la force sur un corps chargé placé dans un champ électrique.
- Pour certaines applications, la deuxième loi de Newton permet alors de déduire la trajectoire de la particule chargée dans un champ électrique.

Cette approche implique qu'il faut définir la notion de champ électrique et développer les outils pour le calculer et le visualiser. C'est l'un des principaux objectifs des chapitres 2, 3 et 4.

Il convient finalement de signaler que nous allons restreindre le calcul du champ électrique aux distributions de charges que nous désignerons par **configurations courantes**, ce qui réfère à la "géométrie" des distributions de charges utilisées dans la conception de certains appareils et plus généralement dans les applications techniques.

2.2 Définition du champ électrique

La figure qui suit illustre le point de vue énoncé dans l'introduction : la charge source distribuée $+Q$ produit un champ électrique au point P de son voisinage. Si on place une charge témoin $+q$ en ce point, une force électrique s'exercera sur celle-ci.



Le champ électrique produit par la charge Q au point P est défini par :

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}_q(P)}{q}$$

De sa définition, on déduit que le champ électrique est la force par unité de charge et s'exprime en newton par coulomb (N/C) dans le système MKS.

Cette définition s'applique en tous points de l'espace dans le voisinage de la charge source Q . La charge q est considérée comme charge témoin et on la suppose positive pour établir la direction du champ électrique. On fait également l'hypothèse qu'elle est assez petite pour ne pas perturber la distribution de la charge Q et, par conséquent, le champ produit par celle-ci. Dans ce qui suit, on laisse tomber l'indice " q " dans l'expression de la force. Les remarques qui suivent sont importantes.

1. Comme la charge témoin q est positive, la direction du champ coïncide avec celle de la force sur celle-ci.
2. Le champ électrique est un champ vectoriel. À chaque point de l'espace dans un champ électrique, on associe donc un vecteur dont la grandeur et la direction caractérise le champ électrique.
3. On peut visualiser les lignes du champ électrique du moins dans le cas des distributions de charges simples. Le champ électrique est tangent à chaque point d'une ligne de champ de même que la force électrique sur une charge ponctuelle placée en un point de celles-ci.

4. Si l'expression du champ est connue, on peut déterminer celle de la force sur une charge témoin :

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

5. Dans plusieurs applications, la seule force sur une particule de masse m et de charge q à prendre en considération est la force électrique, car habituellement, elle est nettement dominante. Dans ces conditions, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{E}$$

Si on développe cette équation vectorielle suivant ses composantes dans un système d'axe XYZ en tenant compte des conditions initiales, cela nous amène à résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = qE_x(x, y, z) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = qE_y(x, y, z) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = qE_z(x, y, z) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_{x0} \\ v_y(0) = v_{y0} \\ v_z(0) = v_{z0} \end{cases}$$

dont la solution est l'équation de la trajectoire de la charge ponctuelle q . Sous forme vectorielle, l'équation de la trajectoire s'écrit :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les solutions du système ci-haut.

Dans le cas d'un champ électrique uniforme, l'accélération d'une particule chargée est constante. Cela nous amène à l'étude du mouvement uniformément accéléré dans le plan si on choisit convenablement notre système d'axes (dans ces conditions, le mouvement se fait dans un plan).

2.3 Méthodes de calcul du champ électrostatique

Ces méthodes sont les suivantes :

1. Calcul du champ d'une charge ponctuelle
2. Calcul du champ d'une charge distribuée (par intégration)
3. Calcul du champ avec le théorème de Gauss (objet du chapitre 3)
4. Calcul du champ électrostatique à partir de l'expression du potentiel (chapitre 3)
5. Le principe de superposition
6. Le champ électrique à l'intérieur et à la surface d'un conducteur (résultats expérimentaux)

Ces méthodes seront utilisées pour calculer le champ électrique des configurations courantes (méthodes 2 et 3 surtout), c'est-à-dire celles qu'on retrouve souvent dans l'environnement et dans les applications techniques. Le principe de superposition vient compléter le tableau, notamment lorsque le champ électrique dans une portion de l'espace est généré par plus d'une configuration de charges. Dans ces conditions, il faut "superposer" les champs générés par chacune des configurations, ce qui, essentiellement, signifie faire l'addition vectorielle des champs générés par chacune de celles-ci.

2.4 Calcul du champ d'une ou de plusieurs charges ponctuelles

Pour une charge ponctuelle Q , on utilise la loi de Coulomb qui donne la force sur une charge témoin q placée dans son voisinage, et la définition du champ électrique pour déterminer le champ électrique à une distance r de celle-ci :

$$\begin{cases} \vec{F}_q = q \left(\frac{kQ}{r^2} \vec{u}_r \right) \\ \vec{F}_q = q \vec{E} \end{cases}$$

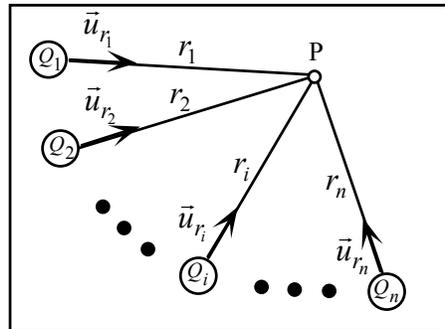
d'où l'on tire :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \vec{u}_r \\ E = \frac{kQ}{r^2} \end{cases}$$

Dans le cas de plusieurs charges ponctuelles $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n$, le champ électrique résultant en un point P placé dans le voisinage de celles-ci est obtenu en calculant d'abord l'expression vectorielle du champ de chacune des charges ponctuelles dans un système d'axes approprié :

$$\vec{E}_i = \frac{kQ_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

où r_i désigne la distance entre la charge Q_i et le point P .



On applique alors le principe de superposition pour obtenir le champ résultant :

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(P) = \sum_{i=1}^n \frac{kQ_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

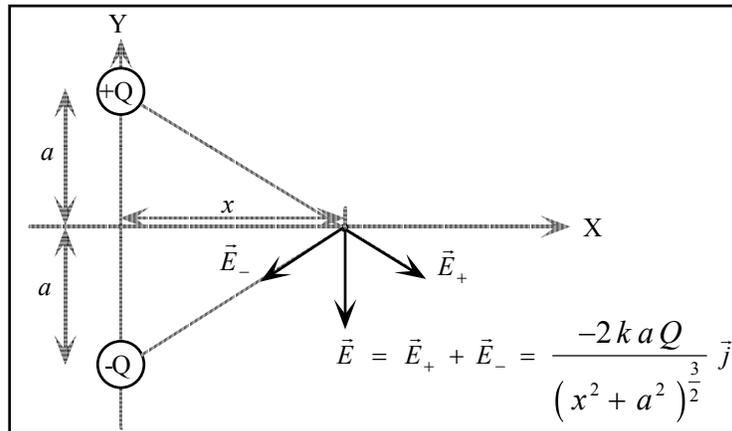
Cette formule générale donne l'expression du champ résultant. Cependant, en terme calculatoire, le calcul du champ s'effectue dans un système d'axes approprié. Chacun des champs se superposant, et, par suite, le champ résultant doivent être exprimés dans ce système d'axes.

Remarque : Lire l'exemple 2.3, page 23 du livre de référence (ex. 2.2, page 19, ancienne édition)

Si l'expression du champ résultant est obtenue en coordonnées rectangulaires, sa grandeur se calcule comme suit :

$$E(P) = \sqrt{E_x^2(P) + E_y^2(P) + E_z^2(P)}$$

Application : Champ électrique d'un dipôle, sur la médiatrice (voir la figure qui suit)

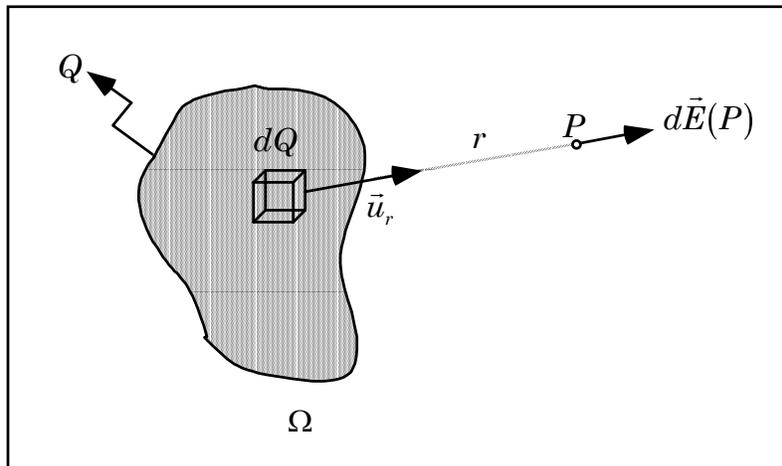


Exercices suggérés sur les charges ponctuelles :

exercices 3, 5, 11, 13 et 17 du chapitre 2 du livre de référence

2.5 Calcul du champ d'une charge distribuée

La formule qui suit permet d'obtenir le champ d'une charge Q distribuée qui ne peut être considérée comme charge ponctuelle. Cette formule utilise le résultat obtenu pour une charge ponctuelle conjointement avec le principe de superposition.



Par référence à la figure, la contribution de l'élément de charge dQ au champ total en P est donnée par :

$$d\vec{E}(P) = \frac{k dQ}{r^2} \vec{u}_r$$

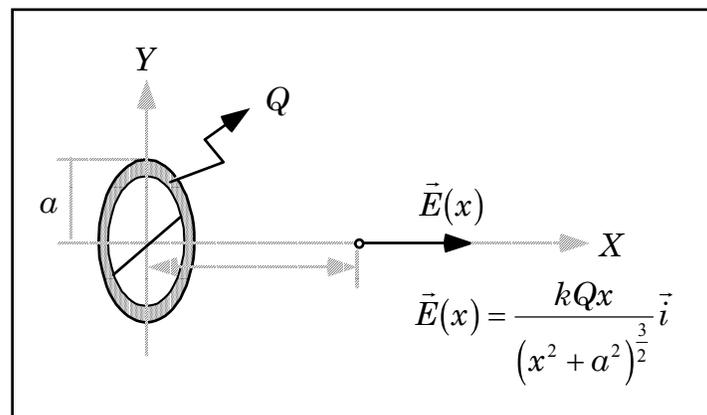
Le champ résultant en P est alors donné par :

$$\rightarrow \left\{ \vec{E}(P) = \int d\vec{E}(P) = \int_{\Omega} \frac{k dQ}{r^2} \vec{u}_r \right.$$

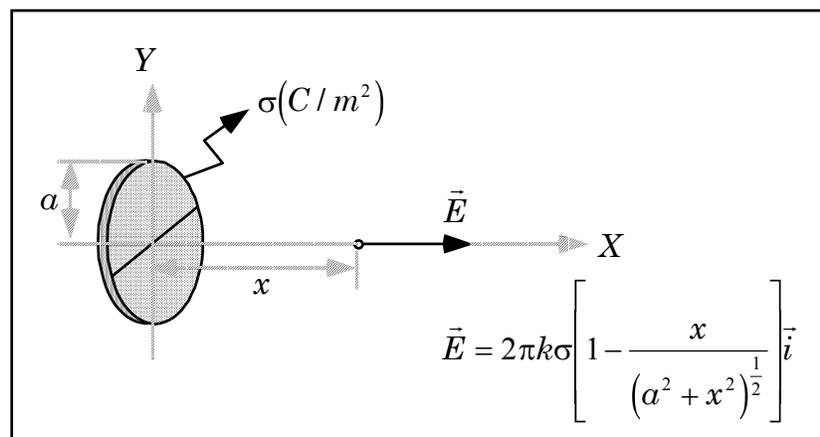
où Ω désigne la configuration ou la géométrie de la distribution de charge.

Les résultats pour les configurations courantes, dont le champ se calcule avec cette méthode, sont présentés ci-dessous. Dans chaque cas, dans les figures, on suppose une charge positive sur le corps chargé pour y tracer la direction du champ; dans ces conditions, la direction du champ pour une charge est tout simplement la direction inverse de celle représentée.

1. Champ électrique dans l'axe d'un anneau mince portant une charge Q .



2. Champ électrique dans l'axe d'un disque avec densité surfacique $\sigma(C/m^2)$ uniforme.



Remarque : La charge totale sur le disque est donnée par $Q = \sigma(\pi a^2)$. Si on donne la charge totale du disque, Q et son rayon a , la densité surfacique est donnée par $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$.

Il faut considérer les cas limites "loin du disque" et "près du disque".

- Si $x \rightarrow \infty$, on retrouve, après l'évaluation de la limite :
$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{kQ}{x^2} \vec{i} \\ E = \frac{kQ}{x^2} \end{cases}$$

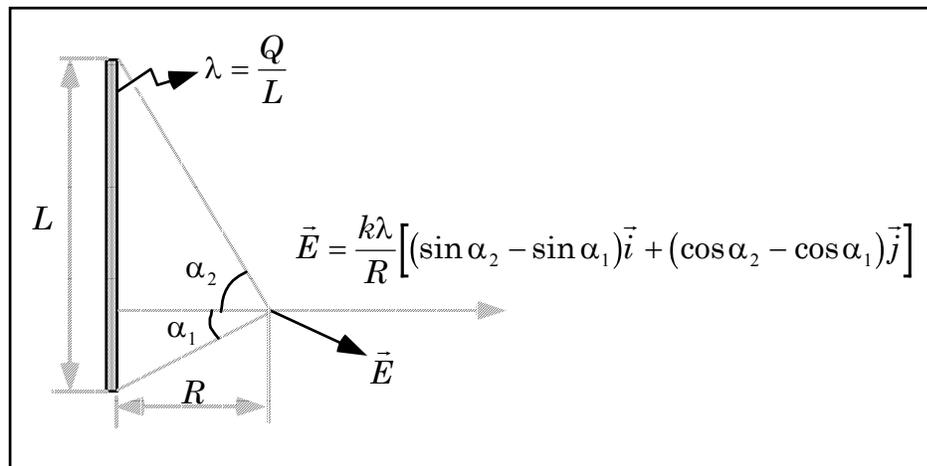
Ce résultat coïncide avec celui obtenu pour la charge ponctuelle et il était prévisible.

- Si $x \rightarrow 0$, on trouve, après l'évaluation de la limite, l'expression du **champ dans le voisinage d'un plan** avec une densité surfacique σ (C/m²) uniforme :

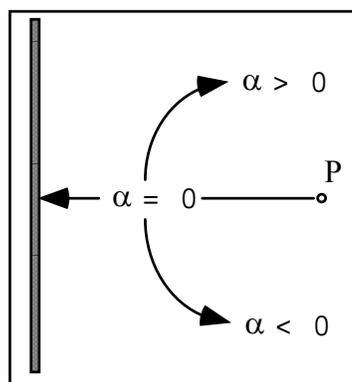
$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{i} \\ E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

Remarque : Les résultats des 2 cas limites qui précèdent doivent être interprétés par rapport à la figure ci-haut. **Dans le cas de l'approximation "près du disque", on remarque que le champ devient uniforme et ne dépend pas de la position.** L'expression obtenue pourra être utilisée pour le calcul du champ électrique dans le voisinage d'un plan chargé de grande dimension, pourvu que ce ne soit pas près des bords. Dans le cas de plusieurs plans chargés, le champ résultant se calcule avec cette expression et le principe de superposition.

3. **Champ dans le voisinage d'un fil de longueur finie L portant une charge Q** uniformément répartie sur sa longueur (ce qui équivaut à une **densité linéaire de charge** $\lambda = \frac{Q}{L}$ (C/m)).



La convention sur les angles α_i qui s'applique au résultat de la figure est présentée dans la figure qui suit :

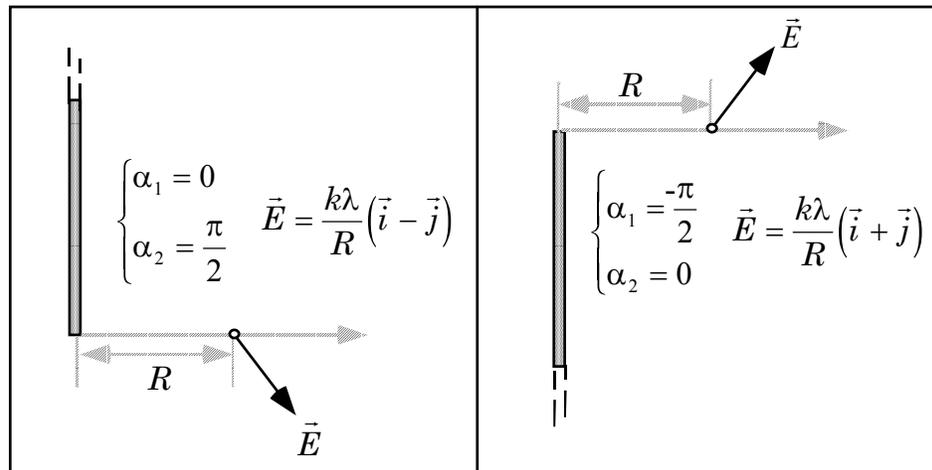


Remarque : Voici des cas particuliers de fils chargés dont le champ électrique se déduit de l'expression qui précède.

3.1) Champ du long fil : Dans ce cas, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, d'où

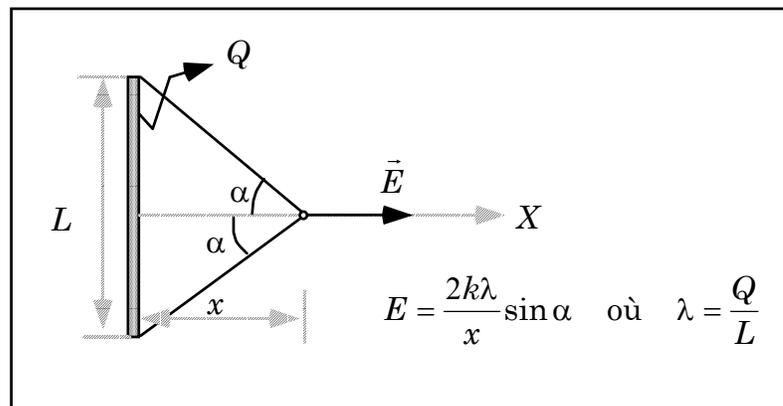
$$E = \frac{2k\lambda}{R}$$

3.2) Champ d'un "demi fil infini" (les 2 cas de la figure)



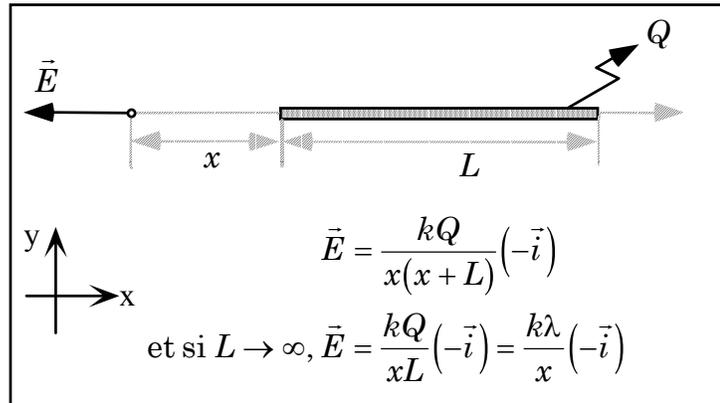
Dans chacun des 2 cas de la figure, le champ fait un angle de 45° avec l'horizontale.

3.3) Champ sur la médiatrice d'un fil de longueur finie.

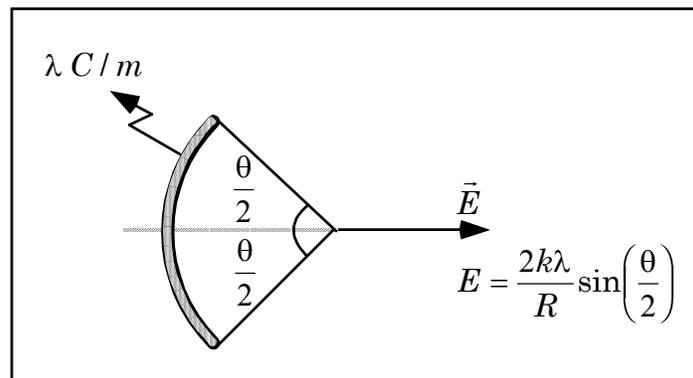


Remarque : Faire le problème #7 du chapitre 2.

4. Champ à une distance x de l'extrémité et dans l'axe d'un fil de longueur L portant une charge Q



5. Champ au centre d'un secteur d'anneau d'angle θ et de rayon R portant une charge Q uniformément répartie.



En particulier, si $\theta = \pi$ (cas du **demi-cercle**) alors $E = \frac{2k\lambda}{R}$

2.6 Champ électrique à l'intérieur et à la surface d'un conducteur

Les résultats qui suivent se vérifient par l'expérience.

- a) **Dans les conditions statiques, le champ électrique (macroscopique) est nul à l'intérieur d'un conducteur.**

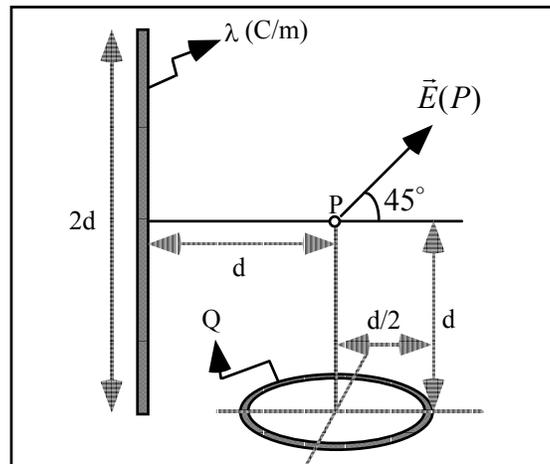
Lorsqu'un conducteur est placé dans un champ électrique extérieur, il se produit une reconfiguration des électrons libres dont l'effet, combiné avec celui des atomes auxquels ils manquent un (ou des) électron(s), est de générer un champ "intérieur" qui se superpose au champ extérieur pour l'annuler. Dans le cas contraire, le champ extérieur continue à opérer cette reconfiguration jusqu'à l'état d'équilibre, celui-ci se traduisant par un champ électrique nul dans le conducteur. De plus :

- b) **Dans les conditions d'équilibre statique, le champ électrique est perpendiculaire en tout point de la surface d'un conducteur.**
- c) **Dans les conditions d'équilibre statique et dans le cas d'un conducteur homogène, la charge nette que porte celui-ci se répartit sur sa surface.**

2.7 Le principe de superposition

Ce principe sert à calculer le champ électrique résultant généré par plusieurs charges ponctuelles ou plusieurs configurations de charges électriques. On peut le résumer comme suit : soit c_1, c_2, \dots, c_n , n configurations de charges qui produisent en un point P des champs $\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \dots, \vec{E}_n(P)$ respectivement. Le champ résultant en P est alors donné par :

$$\vec{E} = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) + \dots + \vec{E}_n(P) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(P)$$

Exemple

La figure illustre une tige de longueur finie située dans le plan de la page portant une densité linéaire de charge connue de λ (C/m) et un anneau situé dans un plan horizontal portant une charge inconnue Q . Les dimensions sont indiquées dans la figure.

- Déterminez séparément les expressions vectorielles et la grandeur des champs de la tige et de l'anneau au point P.
- Sachant que le champ résultant $\vec{E}(P)$ en P fait un angle de 45° avec l'horizontale, déterminez l'expression de la charge sur l'anneau en fonction des paramètres λ et d .

Solution

- Le champ électrique résultant au point P de la figure est la somme vectorielle de celui de la tige ($\vec{E}_t(P)$) et de l'anneau ($\vec{E}_a(P)$):

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_t(P) + \vec{E}_a(P)$$

La détermination du champ résultant exige donc la détermination du champ de chacune des deux configurations en présence. C'est l'objectif de cette question. Dans le cas de la tige, il faut se référer au cas **3.3** de la section qui précède et l'adapter dans le contexte de l'exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(C) \text{ sur la tige} \\ x \rightarrow d \\ \alpha \rightarrow 45^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_i(P) = \frac{2k\lambda}{d} \sin(45^\circ) = \frac{2k\lambda}{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \vec{E}_i(P) = \left(\frac{\sqrt{2} k \lambda}{d} \right) \vec{i} \end{array} \right.$$

Une démarche similaire dans le cas de l'anneau donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(C) \text{ sur l'anneau} \\ a \rightarrow \frac{d}{2} \\ x \rightarrow d \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_a(P) = \frac{kQd}{\left(\frac{d^2}{4} + d^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \vec{E}_a(P) = \left(\frac{kQd}{\left(\frac{d^2}{4} + d^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{j} \end{array} \right.$$

- b)** Pour répondre à cette question, il faut prendre en considération que le champ résultant est donné par

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_i(P) + \vec{E}_a(P)$$

et que celui-ci fait un angle de 45° . Les composantes X et Y du champ résultant sont donc égales. Considérant les résultats obtenus en (a), on obtient l'égalité qui permet de déterminer l'expression de la charge sur l'anneau.

$$\left\{ \frac{kQd}{\left(\frac{d^2}{4} + d^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2} k \lambda}{d} \right. \Rightarrow \left. \left\{ Q = \sqrt{2} \lambda \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} d \right. \right. \quad (C)$$

Les exercices suggérés sur le principe de superposition sont les suivants :

Les exercices 35, 37, 40 et 41, ainsi que les problème 18 et du chapitre 2.

2.8 Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

Dans un champ électrique uniforme, l'accélération de la particule est constante. La 2^e loi de Newton donne les résultats qui suivent :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = \text{constante} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_x = \frac{qE_x}{m} \\ a_y = \frac{qE_y}{m} \end{cases}$$

De plus, le mouvement de la particule peut alors être décrit dans un plan. Les équations du mouvement uniformément accéléré dans le plan sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En X} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_x = \text{cte} \\ v_x(t) = v_{0x} + a_x t \\ x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \end{array} \right. \\ \\ \text{En Y} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_y = \text{cte} \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Souvent, dans les applications (exercices à la fin du chapitre 2), l'accélération est en "Y" seulement ($a_x = 0$).

En général, pour résoudre, il faut écrire correctement les équations qui précèdent dans un système d'axes appropriés en y intégrant les conditions initiales. Il faut de plus interpréter correctement une (ou des) condition(s) particulière(s) à respecter et la (les) traduire correctement dans le contexte des équations ci-dessus et du système d'axes choisi.

Pour certains exercices, les équations qui suivent qui découlent de celles ci-dessus (le système d'équations de la pages précédente) peuvent être très utiles. Elles relient les vitesses finales en x et y aux vitesses initiales en x et y, aux déplacements en x et en y ainsi qu'aux accélérations en x et y respectivement :

$$\begin{cases} v_{fx}^2 = v_{ox}^2 + 2a_x(x - x_o) \\ v_{fy}^2 = v_{oy}^2 + 2a_y(y - y_o) \end{cases}$$

Les **exercices suggérés** sur le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme sont les suivants :

les exercices # 29, 33, 34 ainsi que les problèmes 16 et 17 du chapitre 2.

2.9 Exercices et problèmes suggérés dans le chapitre 2

Exercices # 3, 5, 11, 17, 29, 33, 35, 37, 38, 39, 40 et 41

Problèmes # 2, 7, 13 et 17

CHAPITRE 3

LE THÉORÈME DE GAUSS

3.1 Introduction

Le théorème de Gauss établit une relation entre le **flux du champ électrique** à travers une surface fermée et la charge à l'intérieur de cette surface. Cette relation, qui n'est rien d'autre que la première équation de Maxwell, a les propriétés suivantes :

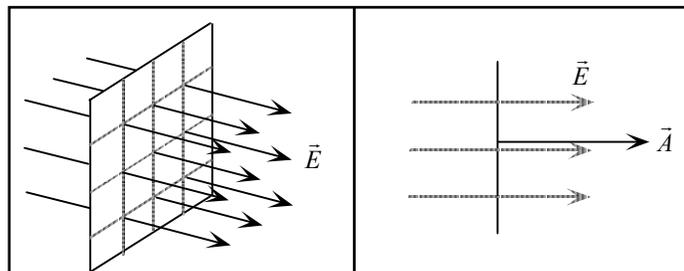
- elle reflète les propriétés générales des champs électriques et ne se limite pas aux champs électrostatiques (contrairement à la loi de Coulomb);
- **elle permet de déterminer simplement et de manière élégante l'expression du champ électrostatique** créé par les distributions de charges qui présentent une symétrie appropriée (sphérique, cylindrique, plan, etc.).
- elle permet de faire la démonstration que la charge nette d'un conducteur en équilibre électrostatique est située à la surface de celui-ci.

Remarque : Comme on le verra plus loin, le champ électrique peut comporter une composante qui n'est pas associée à des charges électriques (champ électrique induit par un champ magnétique variable, par exemple). L'inclusion de cette composante n'invalide pas le théorème de Gauss.

3.2 Flux du champ électrique

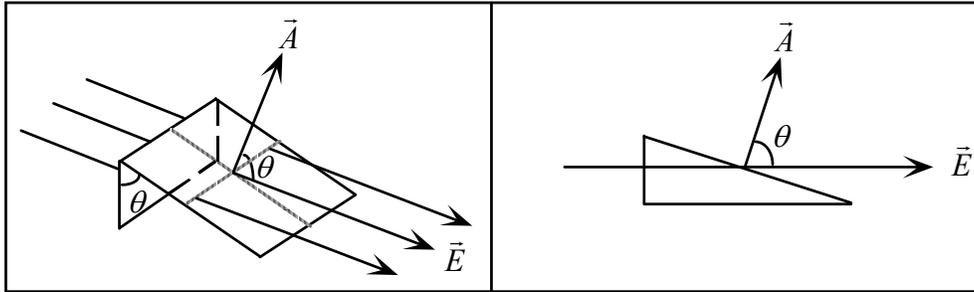
Premier cas : \vec{E} uniforme et perpendiculaire à une surface plane A. C'est le cas illustré dans la figure qui suit.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \perp \text{ à la surface} \\ \vec{E} \parallel \vec{A} \end{array} \right. \Rightarrow \Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$$

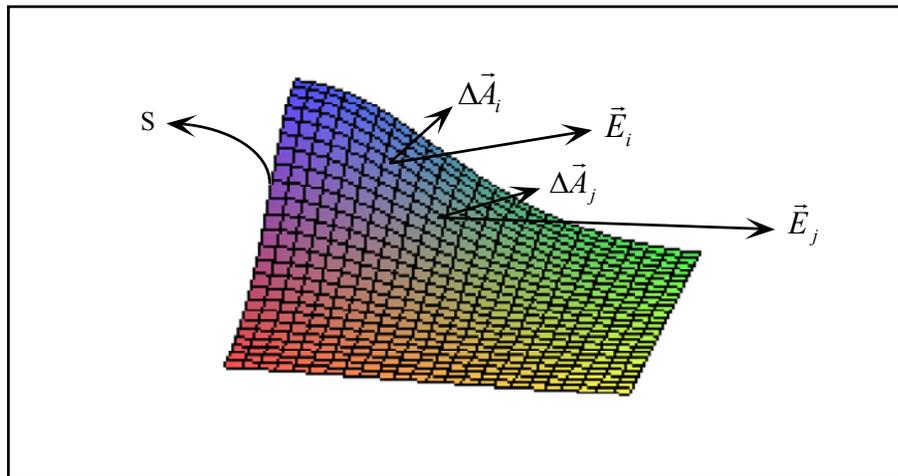


Deuxième cas : \vec{E} uniforme et non perpendiculaire surface plane A (\vec{E} pas // à \vec{A})

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos(\theta)$$



Troisième cas : \vec{E} quelconque (pas nécessairement uniforme) et surface S quelconque.



Pour le calcul du flux dans ce cas, il faut découper la surface (cf. fig) de manière à pouvoir utiliser les résultats qui précèdent pour des surfaces planes. L'élément de flux du champ à travers l'élément de surface $\Delta\vec{A}_i$ est donné par :

$$\Delta\Phi_i \approx \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

d'où l'on tire l'expression approximative pour le flux :

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

Cette expression est approximative car le découpage de la surface n'est pas suffisamment fin pour que le champ soit uniforme sur chacun des l'élément de surface et de plus, l'élément de surface n'est pas tout à fait plan.

Pour obtenir l'égalité, il faut prendre le passage à la limite

$$\left\{ \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ |\Delta \vec{A}_i| \rightarrow 0 \end{array} \right. \Rightarrow \Phi_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{A}_i = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

La limite dans l'expression ci-haut correspond à la définition de Riemann de l'intégrale de surface.

Cette méthode de calcul du flux du champ électrique à travers une surface s'applique à tous les cas, notamment ceux qui précèdent (champs uniformes).

Faire l'exercice 3 du chapitre 3.

3.3 Le théorème de Gauss

Le théorème de Gauss relie le champ électrique sur une surface fermée à la charge nette à l'intérieur de cette surface. Plus précisément, **le flux du champ électrique Φ_E à travers une surface fermée S multiplié par la constante ϵ_0 est égal à la charge nette q_s située à l'intérieur de cette surface.**

$$q_s = \epsilon_0 \Phi_E$$

ou encore :

$$q_s = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Le cercle sur l'intégrale indique que la surface S doit être fermée. On appelle "**surface de Gauss**" la surface S d'intégration .

Le théorème de Gauss est utile pour calculer le champ électrostatique à condition que la distribution de charges présente des propriétés de symétrie permettant de choisir des surfaces (d'intégration) de Gauss S pour lesquelles l'intégrale se fait simplement et surtout, qu'il soit possible d'en tirer une expression pour le champ électrique dans le voisinage de la distribution de charge.

En pratique, l'utilisation judicieuse du théorème de Gauss pour le calcul du champ repose sur les trois points qui suivent :

- a) **l'utilisation de la symétrie de la distribution de charge pour établir la configuration des lignes de champ;**
- b) **le choix d'une surface de Gauss pour laquelle \vec{E} est soit perpendiculaire l'élément de surface, c'est-à-dire parallèle au vecteur $d\vec{A}$ ($\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$), soit parallèle à la surface, c'est-à-dire perpendiculaire à $d\vec{A}$ ($\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$);**
- c) **sur la (ou les) partie(s) de surface où \vec{E} est parallèle à $d\vec{A}$, l'intensité de \vec{E} doit être constante. Alors, sur celle(s)-ci :**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint_S dA$$

Dans le cadre de ce cours, nous utilisons le théorème de Gauss pour les distributions de charges à symétrie sphérique et cylindrique. Dans le cas des distributions sur des surfaces planes, les résultats du chapitre 2 incluant le principe de superposition suffisent.

3.4 Calcul du champ électrique avec Gauss

1) Distributions à symétrie sphérique

Les distributions visées sont les suivantes :

- charge ponctuelle
- charges distribuées sur des corps sphériques
- charges distribuées sur des sphères concentriques
- charge distribuée pour laquelle la densité volumique s'exprime en coordonnées sphériques en fonction de la seule variable r :

$$\rho = \rho(r)$$

Pour ces distributions, les surfaces de Gauss (S) sont des surfaces sphériques (de rayon r) centrées sur les distributions sphériques et le flux, étant donné que la symétrie donne :

$$\begin{cases} \vec{E} \parallel d\vec{A} \\ E = cte \end{cases}$$

Dans ces conditions, le calcul du flux donne

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(4\pi r^2)$$

Le théorème de Gauss peut donc s'écrire simplement :

$$q_s = \varepsilon_0 E(4\pi r^2)$$

où q_s désigne est la charge nette à l'intérieur de la surface sphérique de rayon r . De cette égalité, on peut déduire le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ où \mathbf{r} désigne la variable distance entre le point on l'on calcule le champ et le centre de la distribution.

2) Distributions à **symétrie cylindrique**

Dans le cas de ces distributions, il faut éviter les effets de bord qui se manifestent sur les bouts et qui viennent briser la symétrie. Dans ces conditions, il faut spécifier que le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique dans le voisinage des longs fils où cylindres, loin des bouts, ou dans la partie centrale et à proximité dans les cas où ceux-ci sont de longueur finie. Les distributions considérées sont les suivantes:

- charge uniformément répartie sur long fil droit (mince) ;
- charge uniformément répartie sur un long fil cylindrique conducteur ou non ;
- câble coaxial ;
- charge distribuée dans un espace ayant la forme d'un long cylindre dont la densité volumique s'exprime en fonction de la seule variable distance à l'axe de symétrie (\mathbf{r}), en coordonnées cylindriques.

$$\rho = \rho(r)$$

Pour ces distributions, les arguments de symétrie qui s'appliquent dans leur voisinage, loin des bouts, nous amènent à choisir des surfaces de Gauss cylindriques de longueur l et de rayon r , dont l'axe coïncide avec celui des corps cylindriques chargés. De plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \\ E \text{ est constant} \end{array} \right. \leftrightarrow \text{ sur le tour de la surface cylindrique} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \perp d\vec{A} \\ \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \text{ sur les bouts de la surface cylindrique} \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour ce choix de surface, le calcul du flux se fait en ne considérant que le tour de la surface cylindrique

$$\int_{\text{"tour cyl"}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(2\pi r l)$$

Donc, pour ces distributions, le théorème de Gauss s'écrit

$$q_s = \varepsilon_0 E(2\pi r l)$$

où q_s est la charge nette à l'intérieur de la surface cylindrique de longueur l et de rayon r . Comme dans le cas des distributions à symétrie sphérique, on peut obtenir l'expression du champ électrique dans le voisinage de la distribution de cette égalité.

3.5 Le théorème de Gauss et les conducteurs

Dans le cas d'un **conducteur plein** chargé, portant un excès de charge Q , le théorème de Gauss permet de vérifier l'hypothèse suivant lequel cet excès de charge se trouve sur la surface extérieure du conducteur.

Il est vérifiable expérimentalement que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur. Cela implique que toute surface de Gauss (fermée) prise à l'intérieur du conducteur ne doit pas contenir de charge, sinon le champ électrique ne saurait être nul dans le conducteur, contredisant ainsi les données expérimentales.

La charge nette sur la surface extérieure se dispose de sorte que le champ électrique est perpendiculaire à la surface du conducteur

Dans le cas d'un **corps conducteur avec cavité**, portant une charge nette Q , il faut aborder le problème de la même façon : il faut partir du fait que le champ est nul dans la partie conductrice de celui-ci :

- s'il n'y a pas de charge dans la cavité, la charge Q se retrouve sur la surface extérieure;
- s'il y a une charge q dans la cavité, celle-ci induit une charge $-q$ sur la paroi de la cavité de sorte que toute surface de Gauss prise dans la partie conductrice et englobant la cavité contient une charge nulle (seule possibilité pour expliquer que le champ est nul dans la partie conductrice). Dans ce cas également, on trouve la charge nette Q (dans laquelle est prise en considération la charge q dans la cavité) sur la surface extérieure de celui-ci.

On peut résumer les résultats qui précèdent ainsi :

- **tout excès de charge sur un corps conducteur avec ou sans cavité se dispose de sorte que le champ électrique est nul dans la partie conductrice de celui-ci ;**
- **on retrouve dans tous les cas la charge nette sur la surface extérieure de celui-ci ;**
- **le champ électrique est perpendiculaire en tout point de la surface d'un conducteur.**

3.6 Calcul de la charge et relations associées

Dans le cas de l'application du théorème de Gauss aux distributions à symétrie sphérique et cylindrique, le membre de droite égalité obtenue est parfaitement déterminé. Il reste à calculer le membre de gauche, c'est-à-dire q_s , la charge nette à l'intérieur de la surface d'intégration, pour ensuite déduire l'expression du champ.

Cela nous oblige à décrire les distributions de charges en terme de densités linéaire, surfacique ou volumique suivant le cas.

1. Pour **les corps filiformes ou cylindriques**, on invoque habituellement la densité linéaire pour décrire la charge sur ces corps.

- Si on donne la charge totale Q et la longueur L :

$$\lambda = \frac{Q}{L} (\text{C/m})$$

La charge d'une longueur l est alors donnée par $q = \lambda l$ (C)

- Dans le cas d'un cylindre conducteur de rayon R , il est possible qu'on donne la densité surfacique σ puisque la charge se situe à la surface du conducteur. Alors, on montre facilement que la densité linéaire est donnée par

$$\lambda = \sigma(2\pi R) \quad (\text{C/m})$$

La charge d'une longueur l du cylindre est alors donnée par

$$q = \sigma(2\pi R)l \quad (\text{C})$$

- S'il s'agit d'un cylindre non-conducteur de rayon R avec charge uniformément répartie avec densité volumique ρ (C/m^3), alors :

$$\lambda = \rho(\pi R^2) \quad (\text{C/m})$$

La charge d'une longueur l d'un cylindre de rayon $r \leq R$ est donnée par

$$q = \rho(\pi r^2)l$$

2) Pour les corps sphériques

- Dans le cas d'une sphère conductrice de rayon R , la charge nette Q se trouve à la surface, de sorte que la densité surfacique est donnée par :

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (\text{C/m}^2)$$

- dans le cas d'une sphère non conductrice de rayon R uniformément chargée (charge Q), la densité volumique est donnée par :

$$\rho = \frac{Q}{\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)} \quad (\text{C/m}^3)$$

Dans ce cas, la charge à l'intérieur d'une surface sphérique de rayon $r < R$ est donnée par

$$q = \begin{cases} \rho \left(\frac{4\pi r^3}{3}\right) & \text{avec } \rho \\ Q \frac{r^3}{R^3} & \text{avec } Q \end{cases}$$

Exercices suggérés du chapitre 3

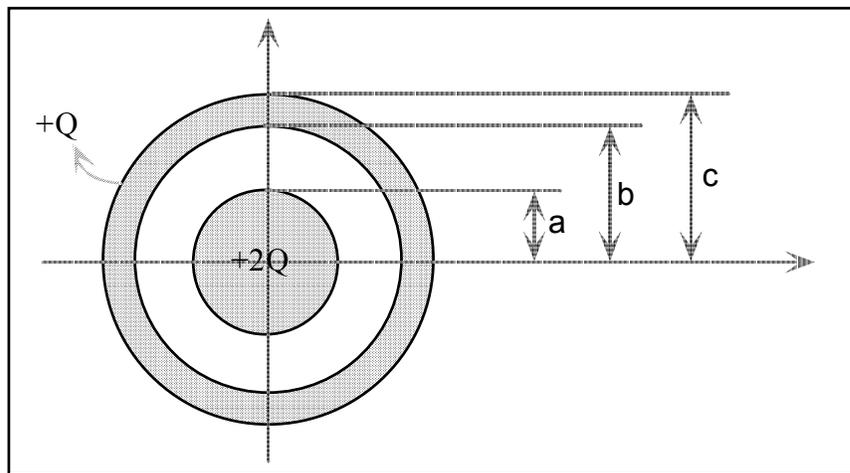
Les exercices 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 30 et 31

et les problèmes 3, 6 et 9.

3.6 Exercice résolu

Application du théorème de Gauss en symétrie sphérique

La figure illustre une sphère métallique de rayon a (m) portant une charge $+2Q$, placée au centre d'une coquille sphérique de rayons intérieur b (m) et extérieur c (m) respectivement, et portant une charge $+Q$.



- Calculer le champ électrique en fonction de r , où r désigne la distance au centre.
- Calculer les densités surfaciques σ_{int} et σ_{ext} sur les parois interne et externe de la coquille sphérique.

Solution

- En symétrie sphérique, le théorème de Gauss s'exprime simplement comme suit :

$$q_s = \epsilon_o E(4\pi r^2)$$

Pour $r < a$, le champ électrique est nul, parce qu'on est dans un conducteur.

$$r < a \Rightarrow E(r) = 0$$

Pour $a \leq r \leq b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_s = +2Q = \varepsilon_o E(4\pi r^2) \\ \Rightarrow \\ E(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \end{array} \right.$$

Pour $b < r < c$ le champ électrique est nul, parce qu'on est dans un conducteur.

$$b < r < c \Rightarrow E(r) = 0$$

Pour $r \geq c$:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_s = +2Q + Q = \varepsilon_o E(4\pi r^2) \\ \Rightarrow \\ E(r) = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \end{array} \right.$$

- b) Pour que le champ soit nul dans la coquille sphérique conductrice, il faut que toute surface sphérique fermée de rayon $b < r < c$ prise dans celle-ci englobe une charge nette nulle. On en déduit que la paroi interne porte une charge $-2Q$ de sorte que

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{-2Q}{4\pi b^2} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

Comme la charge nette que porte la coquille est $+Q$, la charge nette que porte la paroi externe de la coquille doit être de $+3Q$, de sorte que

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{+3Q}{4\pi c^2} \text{ (C/m}^2\text{)}.$$

CHAPITRE 4

LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE

4.1 Introduction

Ce chapitre porte sur la notion de potentiel électrique (souvent désigné par potentiel) associé à une charge source. Cette notion permet le calcul de l'énergie potentielle d'une charge témoin placée dans le voisinage de la charge source. Le fait que la force électrostatique soit conservative nous permet de définir la notion d'énergie potentielle électrique et d'appliquer la loi de la conservation de l'énergie aux problèmes d'électricité. C'est l'une des principales justifications à ce chapitre. Avec l'ajout de cette définition, on dispose, en électricité comme en mécanique, de 2 approches pour l'analyse des systèmes physiques:

- 1) définition et utilisation de la notion de force électrique dans le cadre des lois de Newton;
- 2) définition et utilisation de la notion d'énergie potentielle électrique dans le cadre du principe de la conservation de l'énergie.

De plus, la notion de différence de potentiel est fondamentale à l'analyse des circuits électriques.

Le potentiel d'une charge source, comme le champ électrique qu'elle produit, est une propriété des points de l'espace dans le voisinage et ne dépend que de cette charge source. Le champ électrique d'une charge source peut être décrit soit par une grandeur vectorielle, le champ électrique, soit par une grandeur scalaire, le potentiel. Ces deux notions sont étroitement liées et l'utilisation de l'une ou de l'autre pour résoudre un problème donné n'est, dans la plupart des cas, qu'une question de commodité. Cependant, la nature scalaire du potentiel en fait une notion souvent plus facile à manipuler que le champ électrique (de nature vectorielle) pour l'analyse des systèmes physiques.

4.2 Définition du potentiel

La différence de potentiel entre deux points A et B dans le voisinage d'une charge source se définit dans le processus qui suit : on déplace une charge témoin q de A à B dans le voisinage de celle-ci par l'entremise d'un agent extérieur **en la gardant toujours en équilibre avec le milieu**. Cela se traduit par

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Dans ces conditions, la vitesse de la charge témoin est constante, de même que son énergie cinétique. Le travail W_{ext} effectué par l'agent extérieur apparaît alors sous forme d'une variation de l'énergie potentielle de la charge témoin, puisque son énergie cinétique est constante. Par conséquent :

$$W_{ext} = \Delta U$$

On définit la différence de potentiel électrique entre les points A et B par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = V_B - V_A = \frac{W_{ext}}{q} \\ \text{ou} \\ \Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} \end{array} \right.$$

De la deuxième relation, on peut relier la différence d'énergie potentielle à la différence de potentiel :

$$\Delta U = q \Delta V$$

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q}$$

Remarque Le travail W_{ext} peut être (a) positif, (b) négatif ou (c) nul, ce qui signifie que le potentiel au point B est (a) plus élevé, (b) moins élevé ou (c) égal au potentiel au point A .

L'unité de la différence de potentiel comme celle du potentiel est le volt (V) (1 volt = 1 joule / 1 coulomb) et se déduit de la dernière équation de la remarque 1.

Pour définir le potentiel $V(P)$ en un point P dans le voisinage d'une charge source, il faut choisir (parfois arbitrairement) le point A de sorte que $V_A = 0$ et remplacer B par P pour désigner un point dans le voisinage de celle-ci. Le potentiel de la charge source est alors donné par

$$V(P) = \frac{W_{ext}}{q}$$

Nous obtenons ainsi la fonction "potentiel" associée à une de charge source comme fonction de la position.

Définition : Le potentiel électrique en un point P situé dans le voisinage d'une charge source est donné par le travail pour déplacer à vitesse constante une charge témoin q d'un point de potentiel nul au point P considéré, divisé par la charge q .

Le potentiel d'une charge électrique est un champ scalaire. En chaque point du voisinage de la charge, le potentiel attribue une valeur numérique (un scalaire) s'exprimant en Volts.

Remarque : Le travail, dans le contexte de la définition qui précède est égal à l'énergie potentielle donnée à la charge témoin q . En chaque point du voisinage de la charge source, le potentiel peut s'interpréter comme **l'énergie potentielle par unité de charge** en ce point.

L'énergie potentielle d'une charge témoin q située en un point P situé dans le voisinage d'une charge source est donnée par

$$U(P) = qV(P)$$

On comprend alors l'importance du potentiel dans le contexte du principe de la conservation de l'énergie. Si l'énergie totale est constante, on a l'égalité :

$$\dot{E}nergie_{initiale} = \dot{E}nergie_{finale}$$

Dans le contexte des applications de ce chapitre, on ne considère que les énergies cinétique (K) et potentielle (U) de sorte que **le principe de la conservation de l'énergie** découlant de la dernière égalité s'écrit :

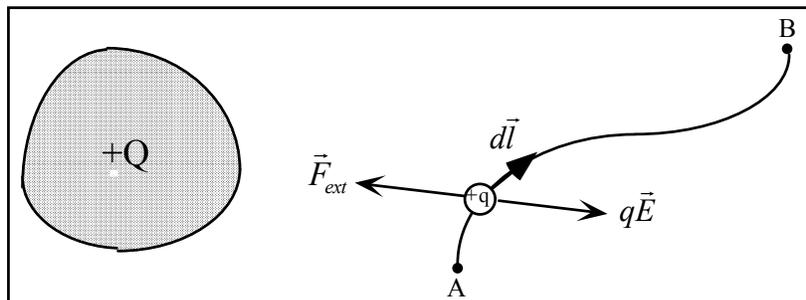
$$\left\{ \begin{array}{l} U_i + K_i = U_f + K_f \\ \text{ou} \\ qV_i + \frac{1}{2}mv_i^2 = qV_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \end{array} \right.$$

Une autre application consiste à considérer les cas pour lesquels un travail extérieur est effectué sur une charge électrique. Dans ces conditions, la relation entre ce travail et les variations d'énergie qu'il engendre est donnée par :

$$W_{ext} = \Delta U + \Delta K = (qV_f - qU_i) + (K_f - K_i)$$

L'application des relations qui précèdent repose sur la connaissance du potentiel électrique associé aux charges sources. Pour calculer le potentiel associé à une charge source donnée, il faut d'abord relier les notions de champ électrique et de potentiel électrique associés à celle-ci.

4.3 Relation entre le potentiel et le champ électrique



Pour déplacer une charge q à vitesse constante d'un point A à un point B dans le voisinage d'une charge source (voir la figure), il faut exercer sur celle-ci une force extérieure qui doit compenser exactement la force électrique résultant de l'action du champ associé à la charge source . On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} v = cte \Rightarrow \vec{F}_{ext} + q\vec{E} = 0 \\ \Rightarrow \\ \vec{F}_{ext} = -q\vec{E} \end{array} \right.$$

Le travail extérieur pour déplacer la charge q d'un point A à un point B est donc donné par :

$$W_{ext} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Comme :

$$V_B - V_A = \frac{W_{ext}}{q}$$

nous trouvons l'expression suivante pour la différence de potentiel :

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Cette expression sera très utile pour le calcul des différences de potentiel. Elle le sera également pour calculer le potentiel associé à une distribution de charges puisqu'il suffit de choisir le point A de sorte que $V_A = 0$. Alors :

$$V(P) = - \int_{"A"}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Cette formule relie formellement le potentiel au champ électrique associé à une charge source quelconque, qu'elle soit ponctuelle ou distribuée.

Cette formule est l'une des techniques utilisées pour la détermination du potentiel d'une charge source. Mais avant d'établir les autres techniques de calcul du potentiel introduites dans ce cours, il convient d'examiner la relation entre le champ électrique et le potentiel.

1. Le potentiel d'une charge source donnée peut être représenté graphiquement par des surfaces équipotentielles (lieu de tous les points de même potentiel). Les lignes du champ électrique de cette même charge source sont perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, de sorte que la connaissance de l'une des représentation permet de déduire l'autre et vice versa.

2. Si on obtient le potentiel par "intégration" du champ électrique :

$$V(P) = - \int_{"A"}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

on obtient le champ électrique par "dérivation" du potentiel. En réalité, le champ électrostatique est un champ vectoriel qui, comme tous les champs conservatifs, admet une fonction *potentielle* dont il est le gradient. **Le champ électrostatique est un champ de gradient:**

$$\vec{E} = -\nabla V$$

En particulier, dans le cas des distributions à symétrie cylindrique et sphérique, le potentiel est une fonction de la seule variable "r", de sorte que :

$$\begin{cases} E(r) = -\frac{dV}{dr} \\ \vec{E}(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \end{cases}$$

En pratique, connaissant le champ électrique, on peut déterminer le potentiel et, connaissant le potentiel, on peut déterminer le champ électrique.

4.4 Méthodes de calcul du potentiel électrique

Méthode 1

La première méthode consiste à relier le calcul du potentiel au champ électrique comme dans la section qui précède :

$$V(P) = - \int_{"A"}^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pour appliquer cette méthode, il faut en principe connaître les techniques d'intégrale de ligne. Cependant, son utilisation est grandement simplifiée par les considérations suivantes.

1. Le champ électrostatique est conservatif. Dans ces conditions, l'intégrale de ligne

$$\int_{C(A \rightarrow B)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

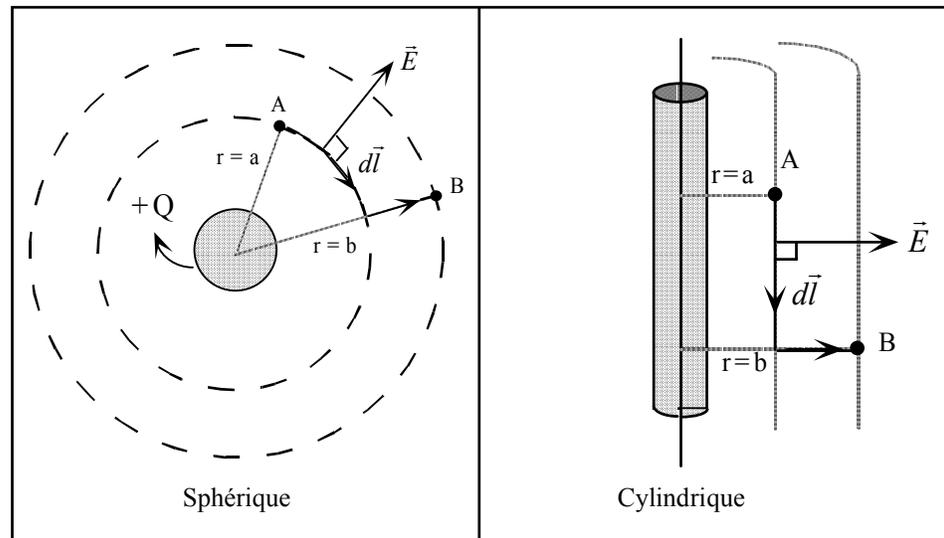
est indépendante du choix de la courbe reliant les points A et B.

2. Les surfaces équipotentielles associées à des charges sources à symétrie sphérique (charge ponctuelle ou de configuration sphérique) sont des surfaces sphériques dont le centre coïncide avec celui de la distribution des charges. Dans le cas de celles à symétrie cylindrique (long fil droit, coaxial, etc), elles sont cylindriques et centrées sur l'axe de la distribution. Dans le cas des charges sources sur des surfaces planes, elles sont des plans parallèles à celui de la distribution. Cela permet de choisir le parcours d'intégration de manière à simplifier l'intégrale à faire avec cette méthode.
3. **Dans le cas des charges sources à symétrie sphérique ou cylindriques, les champs électriques ne dépendent que de la variable "r". L'intégrale de ligne, pour le calcul des différences de potentiel ou pour celui du potentiel, peut se faire avec un choix de parcours tel que la seule contribution au calcul se fait sur la partie radiale de celui-ci, dans le passage direct d'une équipotentielle à l'autre (voir la figure qui suit) :**

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B - V_A = V(r=b) - V(r=a) = - \int_{r=a}^{r=b} E(r) dr \\ V(r) = - \int_{"A"}^r E(r) dr \quad \text{où} \quad V_A = 0 \end{array} \right.$$

Les formules ci-dessus constituent une simplification importante aux calculs des potentiels ou des différences de potentiel associés à des charges sources dont la configuration est à symétrie sphérique ou cylindrique.

Les figures qui suivent expliquent sommairement la nature de la simplification évoquée ci-dessus en illustrant la «stratégie d'intégration».



4. Du fait que le champ électrique est nul dans un conducteur (dans les conditions statiques), tous les points à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur sont au même potentiel.

Méthode 2

La méthode 2 permet de traiter le cas des charges ponctuelles. La méthode 1 peut être utilisée pour le calcul du potentiel d'une seule charge ponctuelle Q . C'est un cas de **distribution à symétrie sphérique** et pour toutes ces distributions, le choix habituel du point A pour lequel le potentiel s'annule est situé à une distance infinie de la charge ($r \rightarrow \infty$). Dans ces conditions:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) = \frac{kQ}{r^2} \Rightarrow \\ V(r) = -\int_{\infty}^r \frac{kQ}{r'^2} dr' = \frac{kQ}{r} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow V(r) = \frac{kQ}{r}$$

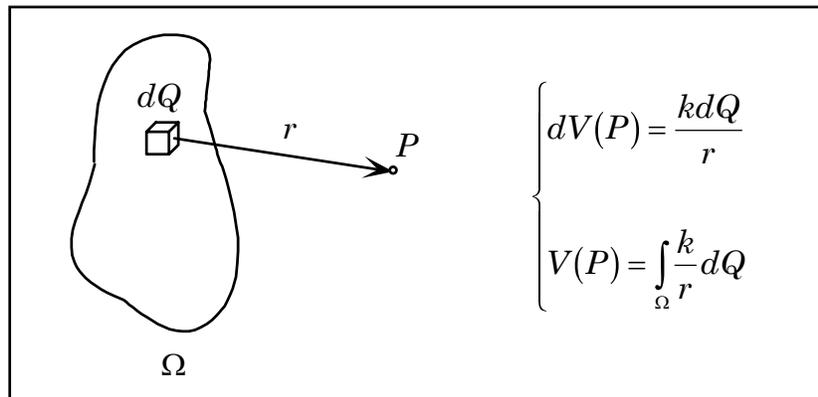
Dans le cas de n charges ponctuelles Q_1, Q_2, \dots, Q_n , on applique le principe de superposition. Les potentiels de chacune de celles-ci en un point P s'additionnent pour donner le potentiel en ce point:

$$\rightarrow V(P) = \sum_{i=1}^n V_i(P) = \sum_{i=1}^n \frac{kQ_i}{r_i}$$

où r_i désigne la distance entre la charge Q_i et le point P .

Méthode 3

Cette méthode utilise à la fois le résultat du potentiel d'une charge ponctuelle et le principe de superposition pour calculer le potentiel d'une distribution de charge continue.



On utilise cette méthode pour calculer le potentiel de certaines configurations courantes de charges sources distribuées. Dans chaque cas, l'espace occupé par la charge source doit être de dimension finie, de sorte que $V \rightarrow 0$ à grande distance de celle-ci. Dans le cas contraire, l'intégrale est non convergente ($V \rightarrow \infty$) à l'infini (lorsque $r \rightarrow \infty$). L'un des exemples illustrant la non convergence dans le calcul du potentiel avec cette méthode est celui du fil de longueur infinie portant une densité linéaire de charge non nulle. Dans ce cas précis, la divergence s'explique par le fait que la charge portée par le fil est infinie.

4.5 Potentiel de quelques configurations courantes

- **Potentiel d'une charge ponctuelle Q (méthode 1)**

$$V(r) = \frac{kQ}{r}$$

- **Potentiel d'une sphère conductrice de rayon R portant une charge Q (méthode 1)**

$$\begin{cases} V(r) = \frac{kQ}{R} & \text{si } r < R \\ V(r) = \frac{kQ}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

- **Potentiel d'une sphère non-conductrice de rayon R portant une charge totale Q uniformément distribuée dans l'ensemble de son volume (méthode 1)**

$$\begin{cases} V(r) = \frac{kQ(3R^2 - r^2)}{2R^3} & \text{si } r < R \\ V(r) = \frac{kQ}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

- **Potentiel à une distance r de l'axe d'un long cylindre conducteur de rayon R portant une charge de densité linéaire λ (C/m) (méthode 1).**

Dans ce cas, il faut fixer arbitrairement le point de potentiel nul : on prend $V(r_0) = 0$. Alors :

$$\begin{cases} V(r) = -2k\lambda \ln\left(\frac{r_0}{R}\right) & \text{si } r \leq R \\ V(r) = -2k\lambda \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) & \text{si } r > R \end{cases}$$

- **Potentiel dans l'axe d'un anneau de rayon R portant une charge Q uniformément distribuée (méthode 3)**

$$V(x) = \frac{kQ}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

On remarque que lorsque $x \gg R$, loin du centre de l'anneau, le potentiel tend vers

$$V(x) = \frac{kQ}{x}$$

ce qui correspond, comme il se doit, au potentiel d'une charge ponctuelle.

- **Potentiel dans l'axe d'un disque de rayon a portant une densité surfacique de charges σ (C/m²) (méthode 3).**

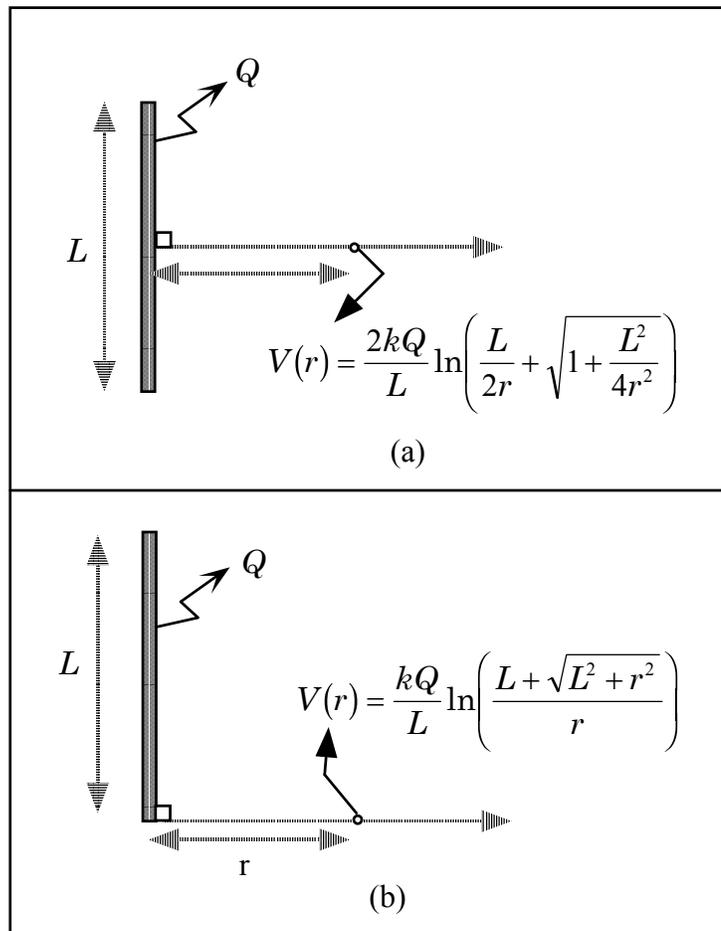
$$V(x) = 2k\pi\sigma \left[(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x \right]$$

Pour un point éloigné ($x \gg a$), on peut montrer en utilisant un développement approprié en série de puissance que cette expression tend vers

$$V(x) = \frac{kQ}{x}$$

ce qui correspond au potentiel d'une charge ponctuelle.

- Potentiel à une distance r et sur la bissectrice d'une tige mince de longueur L portant une charge Q uniformément répartie sur sa longueur (fig.(a)) et potentiel à une distance r sur une droite perpendiculaire à son extrémité (fig.(b)).



- Potentiel à une distance x de l'extrémité et sur l'axe d'une tige de longueur L portant une charge Q .

$$V(x) = \frac{kQ}{L} \ln \left(\frac{x+L}{x} \right)$$

Remarque : Cette liste est évidemment incomplète, mais correspond aux cas habituellement considérés dans un premier cours d'électromagnétisme.

Remarque : Par ailleurs, le potentiel en un point P dû à plusieurs distributions de charges est donné par la somme des potentiels associés à chacune des distributions.

4.6 Énergie potentielle d'une distribution de charges

Il faut effectuer un certain travail pour constituer une charge de géométrie donnée. Ce travail apparaît en énergie potentielle. Dans le cas d'un ensemble de charges ponctuelles, on montre que l'énergie potentielle est donnée par l'expression suivante :

$$U = \sum_{i < j} \frac{k Q_i Q_j}{r_{ij}}$$

où r_{ij} est la distance entre la charge Q_i et Q_j . Par exemple, dans le cas d'un arrangement de trois charges ponctuelles, l'énergie potentielle est donnée par

$$U = \frac{k Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{k Q_1 Q_3}{r_{13}} + \frac{k Q_2 Q_3}{r_{23}}$$

Le premier terme correspond au travail pour amener Q_2 dans le voisinage de Q_1 . Les deux autres correspondent au travail pour amener Q_3 dans le voisinage de Q_1 et Q_2 respectivement. Cet exemple éclaire le sens de $i < j$ dans l'expression générale de U en montrant que cela assure de ne pas calculer deux fois le travail qui consiste à amener une charge donnée dans le voisinage d'une autre (on ferait l'erreur d'ajouter le travail pour amener l'autre dans le voisinage de l'une).

Remarque : Lire l'exemple 4.2 page 58 du livre de référence.

Dans le cas d'une distribution donnée Ω de charge continue, il faut aborder le problème du calcul de l'énergie potentielle de la distribution de manière équivalente à l'exemple. Puisque la configuration n'est pas constituée a priori, il faut procéder par sommation (intégrale) en

considérant le travail minimal dW pour amener une charge dq lorsqu'une partie q de la charge totale Q à été "réunie" dans la distribution Ω :

$$dW_{ext} = V_{\Omega}(q) dq$$

Pour obtenir l'énergie potentielle totale de la distribution, il suffit de calculer le travail minimal pour réunir la charge totale Q dans la configuration Ω :

$$U = \int dW = \int_{\Omega} V_{\Omega}(q) dq$$

Cette expression prend facilement son sens dans le cas du calcul de l'énergie potentielle d'une sphère conductrice de rayon R portant une charge Q (exemple 4.8 page 85):

$$\left\{ \begin{array}{l} dW_{ext} = V(q) dq = \frac{kq}{R} dq \\ U = \int dW_{ext} = \int_0^Q \frac{kq}{R} dq = \frac{kQ^2}{2R} \end{array} \right.$$

L'interprétation de ce résultat est important : on peut emmagaziner de l'énergie en chargeant un corps. Cela nous amène au concept de condensateur (qui sera abordé dans le prochain chapitre) dont l'une des fonctions est le stockage de l'énergie potentielle électrique.

4.7 Exercices et problèmes

Exercices : #3, 7, 11, 13, 17, 18, 19, 23, 35, 45, 46, 50, 51, 52, 59 et 63

Problèmes : # 2, 5, 7, 8, 9 et 10

CHAPITRE 5

CONDENSATEURS ET DIÉLECTRIQUES

5.1 Introduction

Les condensateurs sont des dispositifs qui emmagasinent des charges électriques et, par conséquent, comme démontré à la fin du chapitre précédent, de l'énergie potentielle électrique. Ils jouent un rôle essentiel dans différentes applications :

- circuits de synchronisation électronique
- circuits d'accord de fréquence des postes de radio
- correction des facteurs de puissance des circuits "inductifs"
- atténuation des fluctuations à la sortie des alimentations des postes de radio et de télévision.
- dans tous les circuits qui exigent d'emmagasiner ou de délivrer très rapidement de l'énergie électrique.

On admet en général que sans les condensateurs, l'ère de l'électronique n'aurait jamais vu le jour.

5.2 Définition de la capacité

Un condensateur est un dispositif constitué de deux conducteurs appelés armatures. Celles sont séparées par un isolant. Si on maintient une différence de potentiel V entre les armatures, avec une batterie par exemple, on charge le condensateur en faisant passer des charges (électrons libres) de l'armature reliée à la borne positive de la source de potentiel qui acquiert alors une charge positive $+Q$, à l'armature reliée à la borne négative qui acquiert une charge $-Q$. **On définit la capacité C d'un condensateur par**

$$C = \frac{Q}{V}$$

L'unité de la capacité est le **Farad** dans le système MKS. Considérant la définition de la capacité, le Farad s'exprime en "Coulomb/volt". On peut considérer qu'un condensateur de 1 Farad possède une grande capacité (voir l'exemple 5.1). Pour cette raison, la capacité des condensateurs couramment utilisés s'exprime souvent en micro-Farad ($1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$), en nano-Farad ($1\text{nF} = 10^{-9}\text{F}$) et même en pico-Farad ($1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$).

La définition de la capacité permet de calculer la capacité des condensateurs de configuration courante. De plus, cette définition permet de calculer la charge emmagasinée par un condensateur de capacité C sous une différence de potentiel V :

$$Q = CV$$

ainsi que la tension au bornes des armatures du condensateur de capacité C portant une charge Q :

$$V = \frac{Q}{C}$$

La capacité d'un condensateur dépend, comme on le verra plus loin, de sa géométrie ainsi que du matériau isolant (diélectrique) utilisé entre ses armatures.

5.3 Calcul de la capacité des condensateurs de configuration courante

Essentiellement, on utilise la définition pour calculer la capacité des condensateurs de configuration courante et il faut considérer le calcul de la capacité des groupements.

Dans le cas des configurations courantes, il y a

- le condensateur plan,
- le condensateur sphérique,
- le condensateur cylindrique
- le cas des conducteurs isolés.

Le condensateur plan

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs de surface A séparé d'une distance d de dimension petite par rapport aux dimensions des cotés de la surface A . Dans ces conditions, le champ électrique E est uniforme entre les armatures et donné par

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

La différence de potentiel entre les armatures est alors donnée par

$$V = E d = \frac{Q d}{\epsilon_0 A}$$

La capacité est alors obtenue en appliquant la définition :

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q d}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Comme on le constate, la capacité dépend de la constante diélectrique du milieu entre les armatures, ainsi que des facteurs géométriques :

- la capacité est proportionnelle à la surface A des armatures qui représente en fait la mesure de l'espace où est disposée la charge Q ;
- la capacité est inversement proportionnelle à la distance d entre les armatures, car l'énergie potentielle qu'il faut donner aux charges sur les armatures est proportionnelle à la distance entre celles-ci, ce qui en fait un facteur limitatif de la charge totale qui peut être emmagasinée sur chacune des armatures. De fait, dans la définition de la capacité, la différence de potentiel entre les armatures qui est proportionnelle à la distance entre celles-ci est au dénominateur.

Finalement, l'aire des armatures distantes de 1 mm d'un condensateur plan de 1 Farad serait de l'ordre de 100 km² s'il n'y a pas de diélectrique entre les armatures! On peut toutefois construire des condensateurs plan de 1 F dont le volume est de l'ordre du litre avec la technique illustrée dans la figure 5.5(a) et un isolant (diélectrique) efficace.

Le condensateur sphérique

Ce type de condensateur est constitué d'une sphère conductrice de rayon R_1 (armature positive) portant une charge $+Q$ placée à l'intérieur d'une coquille sphérique conductrice mince de rayon R_2 (armature négative) portant une charge $-Q$.

Le champ électrique entre les sphères est donné par

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La différence de potentiel entre les sphères est alors donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} V = |V_2 - V_1| = \left| -\int_{R_1}^{R_2} E(r) dr \right| = \left| -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \right| \\ \Rightarrow V = \left| \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \right| \\ \rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{array} \right.$$

De la définition de la capacité, $C = \frac{Q}{V}$, on obtient :

$$\rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

Le condensateur cylindrique

Le condensateur cylindrique est constitué d'un cylindre central conducteur de rayon a et de longueur l qui constitue l'armature de polarité positive (portant une charge $+Q$) situé dans l'axe d'une coquille conductrice cylindrique mince de rayon b qui constitue l'armature de polarité négative (portant une charge $-Q$). La différence de potentiel entre les armatures se calcule comme suit :

$$E = \frac{2k\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = |V(r=b) - V(r=a)| = \left| -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l r} dr \right| \\ \\ \Rightarrow \\ \\ V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{array} \right.$$

Avec la définition $C = \frac{Q}{V}$, on trouve

$$\rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Finalement, il faut considérer la question de la valeur de la capacité d'un conducteur isolé. On l'obtient expérimentalement en mesurant la charge sur le conducteur et la différence de potentiel avec l'**autre armature, la terre**. La capacité est alors donnée par le rapport

$$C = \frac{Q}{V}$$

Dans le cas d'une sphère conductrice isolée de rayon R portant une charge Q , on peut déterminer l'expression de la capacité puisque la valeur du potentiel de la sphère est celui à sa surface. Il est donné par

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Ce résultat correspond à la différence de potentiel avec la terre dont le potentiel est considéré égal à 0.

Avec $C = \frac{Q}{V}$, on trouve

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

La question de la capacité d'un conducteur isolé soulève un problème bien connu en électrotechnique, celui de la "gestion" de l'électricité statique. En particulier, si le conducteur comporte une ou des zone(s) en pointe, il y aura dans le voisinage de celle(s)-ci un champ électrique intense si des charges s'y installent. De plus, la capacité des conducteurs utilisés dans les circuits électriques doit être prise en considération, car les effets peuvent être non négligeables. L'un des cas très importants est celui des lignes de transport de l'énergie électrique, pour lesquelles on ne peut négliger la capacité des fils utilisés.

5.4 Calcul de la capacité des groupements

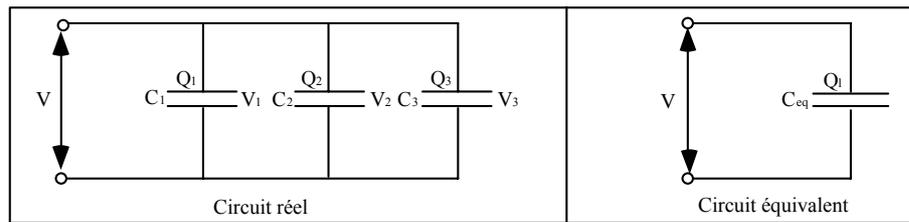
On distingue 2 types de groupements: les groupements en parallèle et les groupement en série.

- Lorsqu'on ne dispose pas de condensateurs de capacité suffisante, il faut les regrouper pour obtenir une capacité équivalente assez importante pour les fins d'une certaine application. Il suffit alors de les disposer en parallèles.
- Lorsque les condensateurs ne peuvent supporter la différence de potentiel de la source, il faut les regrouper en séries pour ramener la différence de potentiel à ce que ceux-ci peuvent supporter.
- Finalement, il faudra parfois combiner les 2 types de groupement pour obtenir un groupement de capacité équivalente voulue.

Voilà la justification du calcul de la capacité équivalente des groupements série et parallèle.

Groupements en parallèle

La figure qui suit illustre un groupement de 3 condensateurs en parallèles et le circuit équivalent.



Les relations caractéristiques de ce type de groupement sont (voir la figure) :

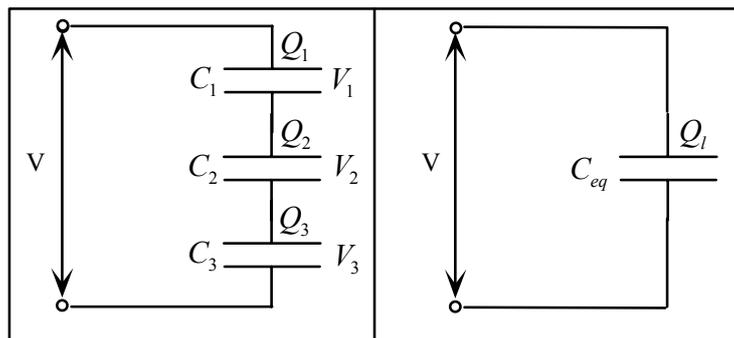
$$\left\{ \begin{array}{l} V = V_1 = V_2 = V_3 \\ \text{(égalité des tensions sur chacun des condensateurs)} \\ \\ Q_l = Q_1 + Q_2 + Q_3 \\ \text{(charge libre = somme des charges sur chacun des condensateurs)} \\ \\ C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 \\ \text{(la capacité équivalente est la somme des capacités)} \end{array} \right.$$

Remarque (1) : On utilise souvent la configuration en parallèle pour obtenir des groupements de grande capacité équivalente.

Remarque (2) : Les armatures de même signe sont reliées (donc au même potentiel) dans ce type de groupement.

Groupement en série

La figure qui suit illustre un groupement de 3 condensateurs en série et le circuit équivalent.



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_l = Q_1 = Q_2 = Q_3 \\ V = V_1 + V_2 + V_3 \\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \end{array} \right.$$

Remarque (1) : L'égalité des charges sur chacun des condensateurs est physiquement une condition essentielle pour que dans les conditions statiques, le champ électrique soit nul à l'intérieur des armatures, puisqu'on est dans un conducteur. D'autre part, la charge dans la partie isolée du groupement se doit d'être nulle.

Remarque (2): On constitue habituellement (mais pas exclusivement) ce type de groupements lorsque les condensateurs dont on dispose ne peuvent supporter la tension maximale à laquelle ceux-ci seraient soumis dans les circuits où ils seraient utilisés. En les disposant en série, on peut résoudre ce problème.

Remarque (3) : La capacité équivalente de deux condensateurs en série est plus petite que la capacité de celui de plus petite capacité. D'autre part, la capacité équivalente de 2 condensateurs de capacité C_1 et C_2 est donnée par :

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Finalement, il est important de préciser qu'il n'est généralement possible de constituer des groupements de capacité voulue qu'en combinant les deux types de groupements.

5.5 Énergie dans un condensateur

L'expression de l'énergie emmagasinée dans un condensateur est obtenue en calculant le travail pour disposer une charge totale Q sur l'armature positive du condensateur.

Le travail dW_{ext} pour disposer une charge dq sur l'armature positive d'un condensateur de capacité C , lorsque la charge est q , est donné par :

$$dW_{ext} = V(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

Le travail total W_{ext} , qui apparaît sous forme d'énergie potentielle électrique U , est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ext} = U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \\ \Rightarrow \\ U = \frac{Q^2}{2C} \end{array} \right.$$

Si on utilise la relation $Q = CV$, l'expression de U peut aussi s'écrire comme suit :

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

L'énergie emmagasinée s'exprime donc d'une part en fonction de la charge Q sur les armatures et la capacité C du condensateur et d'autre part et de façon équivalente en fonction de la tension V aux bornes et de la capacité C du condensateur.

Finalement, la densité d'énergie u dans un champ électrique \vec{E} s'exprime par

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

et s'exprime en (J / m³) et s'évalue localement. Cette expression signifie qu'on peut emmagaziner de l'énergie dans un champ électrique. On peut de fait utiliser cette expression pour calculer l'énergie totale U dans un champ électrique en intégrant la densité d'énergie sur la région R de l'espace où le champ est non nul :

$$U = \int_R u(E) dv = \int_R \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv$$

5.6 Les diélectriques

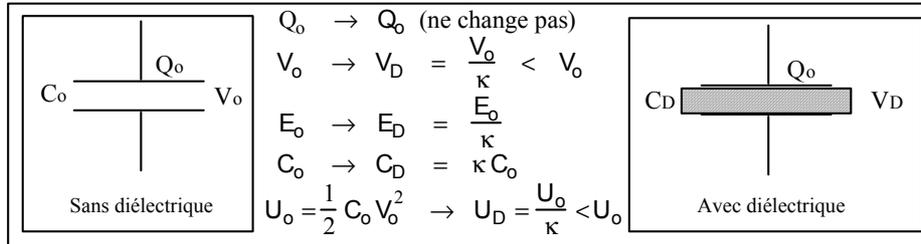
On place un diélectrique entre les armatures d'un condensateurs pour en augmenter la capacité. On augmente ainsi sa capacité d'emmagaziner de l'énergie. De plus, cela a pour effet d'augmenter la tension maximale que peut supporter le condensateur, en comparaison avec un condensateur de géométrie et de dimensions identiques, sans diélectrique entre ses armatures.

Les deux expériences qui suivent permettent d'établir l'ensemble des conséquences de l'introduction d'un diélectrique dans un condensateur.

Sans pile

On charge deux condensateurs plans identiques et sans diélectrique de capacité C_0 avec une pile qui produit une différence de potentiel V_0 aux bornes des condensateurs. **On débranche alors la source et ensuite seulement, on introduit un diélectrique dans l'un des condensateurs.**

La figure résume les observations lorsqu'on compare les 2 condensateurs.



Dans le cas de cette expérience, la charge libre sur les armatures ne change pas avec l'introduction du diélectrique car la source est débranchée et les armatures sont isolées l'une de l'autre. On mesure cependant une différence de potentiel plus petite avec le diélectrique. Cela s'explique par le champ électrique existant entre les armatures qui provoque l'apparition de charges induites sur chacune des faces du diélectrique entre les armatures, charges dont les polarités sont à l'inverse de celles à la surface des armatures avec laquelle chacune des faces du diélectrique est en contact. Ces charges induites produisent donc un champ électrique induit \vec{E}_i dans la direction inverse du champ \vec{E}_0 associé aux charges libres sur les armatures. Le champ résultant entre les armatures est donné par

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \\ E = E_0 - E_i \end{cases}$$

C'est l'explication de la diminution du champ électrique entre les armatures avec l'introduction du diélectrique et, par voie de conséquence, de la diminution de la différence de potentiel entre les armatures.

La constante diélectrique κ est définie par le rapport des tensions à vide et avec diélectrique:

$$\kappa = \frac{V_0}{V_D}$$

Dans un condensateur plan, le champ électrique peut être considéré comme étant uniforme.

Cela permet d'établir les relations suivantes:

$$\begin{cases} V_0 = E_0 d \\ V_D = E_D d \end{cases}$$

où d est la distance entre les armatures. Si nous utilisons la relation ci-haut pour la constante diélectrique, on tire les relations qui suivent entre la tension à vide et avec le diélectrique, ainsi que le champ à vide et avec le diélectrique :

$$\begin{cases} V_D = \frac{V_0}{\kappa} \\ E_D = \frac{E_0}{\kappa} \end{cases}$$

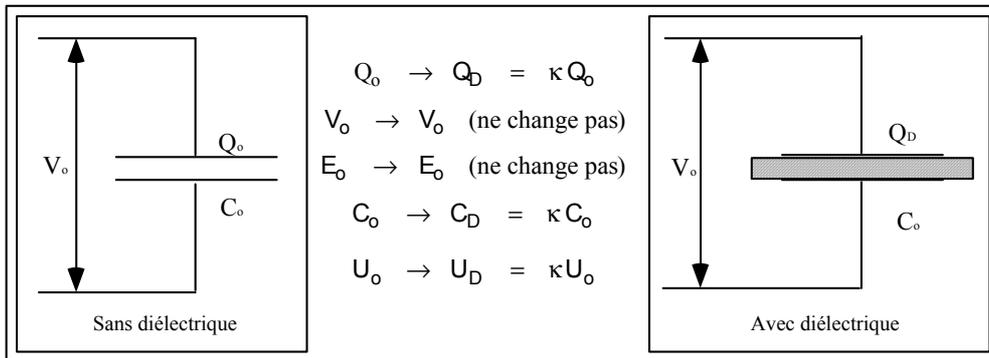
La capacité avec le diélectrique s'obtient avec la définition :

$$\begin{cases} C_D = \frac{Q_D}{V_D} = \frac{Q_0}{\frac{V_0}{\kappa}} = \kappa \left(\frac{Q_0}{V_0} \right) = \kappa C_0 \\ \Rightarrow \\ \rightarrow C_D = \kappa C_0 \end{cases}$$

Avec pile

Cette deuxième expérience vise essentiellement à démontrer que l'ajout d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur augmente sa capacité de stockage de charges électriques et, par conséquent, d'énergie électrique.

Cette expérience consiste à comparer l'état de deux condensateurs plans identiques si on maintient une même différence de potentiel à leurs bornes et qu'on ajoute un diélectrique dans l'un d'eux. La figure qui suit résume ce qu'on mesure et constate.



Dans cette expérience, le fait que la tension soit la même ne peut s'expliquer que par un surplus de charge sur les armatures du condensateur avec le diélectrique, pour compenser l'effet de sa présence. En effet :

$$C_D = \kappa C_0 = \kappa \left(\frac{Q_0}{V_0} \right) = \left(\frac{\kappa Q_0}{V_0} \right) = \left(\frac{Q_D}{V_0} \right)$$

On a donc le résultat attendu de l'augmentation de la charge sur les armatures du condensateur avec le diélectrique :

$$\rightarrow Q_D = \kappa Q_0$$

Dans le cas de l'énergie :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_D = \frac{C_D V_D^2}{2} = \frac{1}{2} (\kappa C_0) V_0^2 = \kappa \left(\frac{C_0 V_0^2}{2} \right) \\ \Rightarrow \\ U_D = \kappa U_0 \end{array} \right.$$

L'ajout d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur augmente sa capacité de stockage de charges électrique et, par conséquent, de stockage d'énergie électrique.

Finalement, il faut modifier le théorème de Gauss pour tenir compte de la présence du diélectrique. Si on utilise le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique dans un diélectrique, il faut le formuler comme suit, à la lumière des éléments qui précèdent :

$$q_s = \kappa \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

5.7 Exercices et problèmes suggérés

Exercices # 1, 3, 7, 11, 13, 15 à 18, 19, 21, 25, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 43 et 45

Problème # 5

Chapitre 8

Champ magnétique et force magnétique

8.1 Force magnétique sur une charge ponctuelle

Les observations expérimentales sur la force \vec{F} qui s'exerce sur une particule de charge q se déplaçant à une vitesse v en un point où le champ magnétique est \vec{B} sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ proportionnelle à } q \\ F \text{ proportionnelle à } v \\ F \text{ proportionnelle à } \sin(\theta) \\ \vec{F} \perp \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{F} \perp \vec{B} \end{array} \right.$$

où θ désigne l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur champ magnétique au point où l'on calcule la force. Les trois premières observations révèlent que

$$(F) \text{ est proportionnelle à } qv \sin(\theta)$$

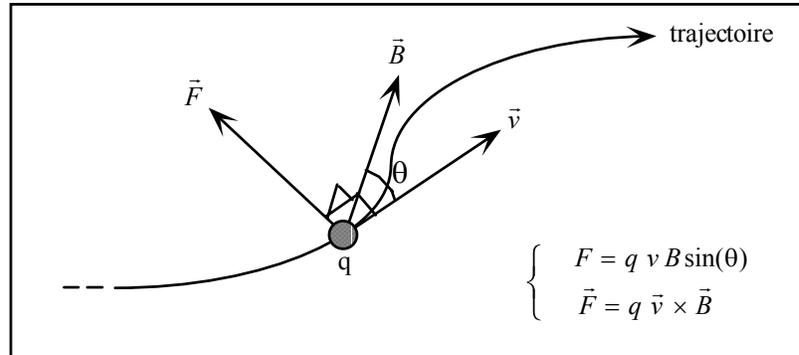
La **grandeur du champ magnétique B** au point où l'on mesure la force est définie comme étant la **constante de proportionnalité entre la force F et le produit $qv \sin(\theta)$** :

$$F = qvB \sin(\theta)$$

Ce résultat exprimé en tenant compte de la quatrième observation ($\vec{F} \perp \vec{v}$ et $\vec{F} \perp \vec{B}$) implique qu'il faut définir l'expression vectorielle de la force magnétique par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

La figure qui suit résume les observations et les résultats qui précèdent.



On obtient les composantes de la force en développant le produit vectoriel ($\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$) dans la définition de la force :

$$\begin{cases} F_x = q (v_y B_z - v_z B_y) \\ F_y = q (v_z B_x - v_x B_z) \\ F_z = q (v_x B_y - v_y B_x) \end{cases}$$

Remarque : On peut montrer que la force magnétique ne fait aucun travail sur la particule chargée. En effet, la force magnétique est toujours perpendiculaire au déplacement de la particule de sorte que le travail dW qui est donné par le produit scalaire de la force avec le déplacement est nul. Plus formellement :

$$\begin{cases} dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ d\vec{l} = \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \vec{v} dt \Rightarrow dW = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \\ \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \end{cases}$$

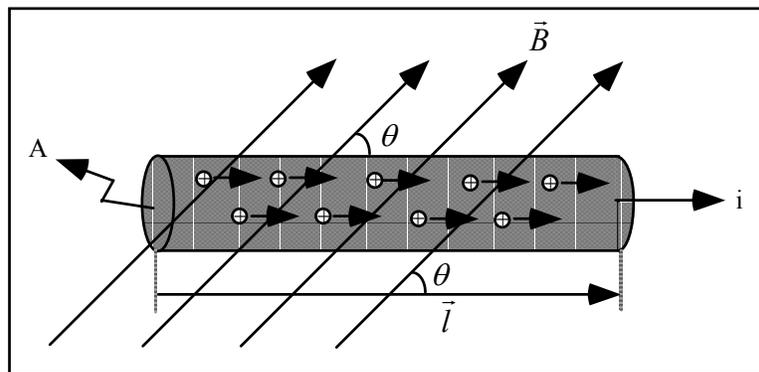
puisque par définition du produit vectoriel

$$\vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

L'une des conséquences est qu'en l'absence d'autres forces, la grandeur de la vitesse (et par conséquent l'énergie cinétique) de la particule ne sera pas affectée par cette force. Par contre, la direction de la vitesse sera modifiée. Comme on le verra plus loin, si les autres forces sur la particule chargée sont nulles, la trajectoire de celle-ci sera circulaire ou hélicoïdale.

8.2 Force sur un conducteur parcouru par un courant

Cas 1 : Conducteur droit dans un champ magnétique uniforme



La figure illustre le portrait statistique à partir duquel on détermine la force sur un conducteur droit de longueur l dans un champ magnétique uniforme : on suppose que tous les porteurs de charge q positive se déplacent dans la direction du courant avec une vitesse. Dans ces conditions, la force sur un porteur de charge est donnée par :

$$\vec{f} = q \vec{v}_d \times \vec{B}$$

On obtient la force totale sur le conducteur en multipliant cette force par le nombre total de porteurs de charges dans le conducteur droit considéré. Ce nombre est obtenu en multipliant le nombre de porteur de charge (n) par mètre cube du conducteur par le volume (Al) du conducteur. On obtient :

$$\vec{F} = N \vec{f} = n Al q \vec{v}_d \times \vec{B}$$

On peut exprimer la force autrement, si on remarque qu'en choisissant \vec{l} dans la direction du courant, on a l'égalité

$$l\vec{v}_d = v_d\vec{l}$$

Avec ces considérations, l'expression de la force est donnée par :

$$\vec{F} = n q v_d A \vec{l} \times \vec{B}$$

Si on utilise les relations connues qui suivent :

$$\begin{cases} J = n q v_d \\ i = JA \end{cases}$$

on obtient l'expression de la force sur le conducteur :

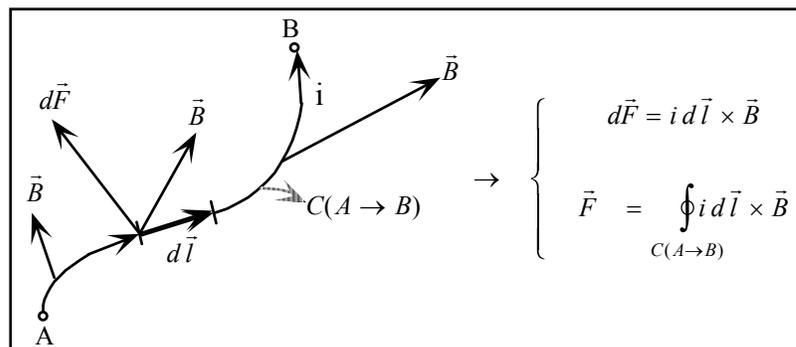
$$\rightarrow \begin{cases} \vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow \begin{cases} F_x = i(l_y B_z - l_z B_y) \\ F_y = i(l_z B_x - l_x B_z) \\ F_z = i(l_x B_y - l_y B_x) \end{cases} \\ \\ F = i l B \sin(\theta) \end{cases}$$

Remarque : Les formules précédentes permettent de calculer correctement la force sur le conducteur. Cependant, il y a lieu de préciser la nature exacte de cette force. En réalité, la force s'exerce sur des porteurs de charge qui ne sont pas liés aux atomes qui constituent le conducteur (les porteurs de charge sont libres). On ne peut alors considérer que c'est cette force qui agit sur le conducteur. Elle a plutôt comme conséquence de redistribuer les porteurs de charge de sorte qu'un champ électrique est créé dans le conducteur. **C'est l'action de ce champ agissant sur des atomes qui ont perdu des porteurs de charge qui engendre la force sur le conducteur.**

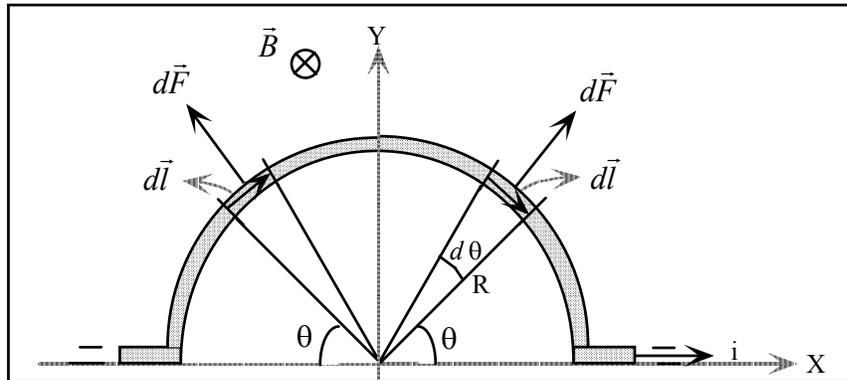
Remarque : Le déplacement d'un conducteur dans un champ magnétique produit automatiquement le déplacement des porteurs de charge. La force magnétique sur les porteurs de charge produira un courant dans ce conducteur. C'est ainsi que l'on produit de l'énergie électrique. Cependant, ce courant dans le conducteur placé dans un champ magnétique se traduit également par une force sur le conducteur dont l'effet est de s'opposer au mouvement de celui-ci.

Cas 2 : Conducteur courbe dans un champ magnétique quelconque

La figure qui suit illustre un conducteur parcouru par un courant i dont la configuration est celle d'une courbe $C(A \rightarrow B)$ dans un champ magnétique qui n'est pas uniforme. Dans ces conditions, il faut calculer la force par sommation des éléments de force $d\vec{F}$ sur des éléments de longueur infinitésimale $d\vec{l}$, pour tenir compte de la courbure du conducteur et/ou de la non uniformité du champ magnétique. En effet, l'élément de grandeur infinitésimale est droit et le champ magnétique est droit uniforme sur toute sa longueur. Dans ces conditions, on peut utiliser le résultat qui précède pour calculer $d\vec{F}$. Les résultats sont illustrés dans la figure qui suit.



Exemple : Calcul de la force magnétique sur un conducteur en demi-cercle de rayon R placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} (voir la figure qui suit).



Pour le calcul de l'élément de force $d\vec{F}$ sur une portion $d\vec{l}$ du conducteur, le résultat qui précède s'applique :

$$\begin{cases} d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} \\ d\vec{l} \perp \vec{B} \end{cases} \Rightarrow dF = i B dl$$

Par symétrie, la force sur la partie circulaire du conducteur est verticale. Alors :

$$\begin{cases} F = \int_{arc} dF_y = \int_{arc} i B dl \sin(\theta) \\ dl = R d\theta \end{cases} \Rightarrow F = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} i B R \sin(\theta) d\theta = i B (2R)$$

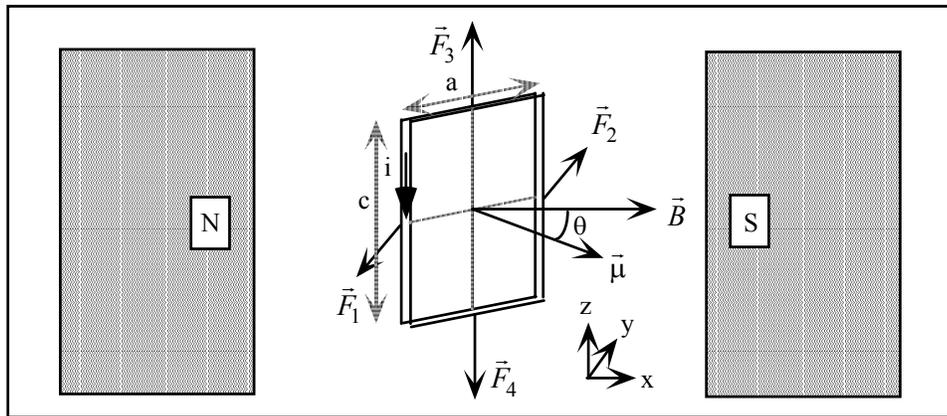
D'où :

$$\begin{cases} F = i B (2R) \\ \vec{F} = i B (2R) \vec{j} \end{cases}$$

Le résultat aurait été le même sur un conducteur droit de longueur $2R$. **D'ailleurs, ce résultat se généralise à un conducteur joignant 2 points A et D par une courbe quelconque dans un champ magnétique uniforme.** Dans ce cas, on aurait trouvé

$$\vec{F} = i \vec{AD} \times \vec{B}$$

8.3 Moment de force sur une boucle de courant



La figure illustre une boucle de courant constituée de N spires de surface A et dans lesquelles circule un courant i , placée dans un champ magnétique uniforme \vec{B} .

L'analyse des forces sur chacun des côtés de la boucle de courant nous amène à conclure que la somme de celles-ci est nulle puisque

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = Ni (\vec{c} \times \vec{B}) \\ \vec{F}_1 = Ni (-\vec{c} \times \vec{B}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_2 = NicB\vec{j} \\ \vec{F}_1 = -NicB\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

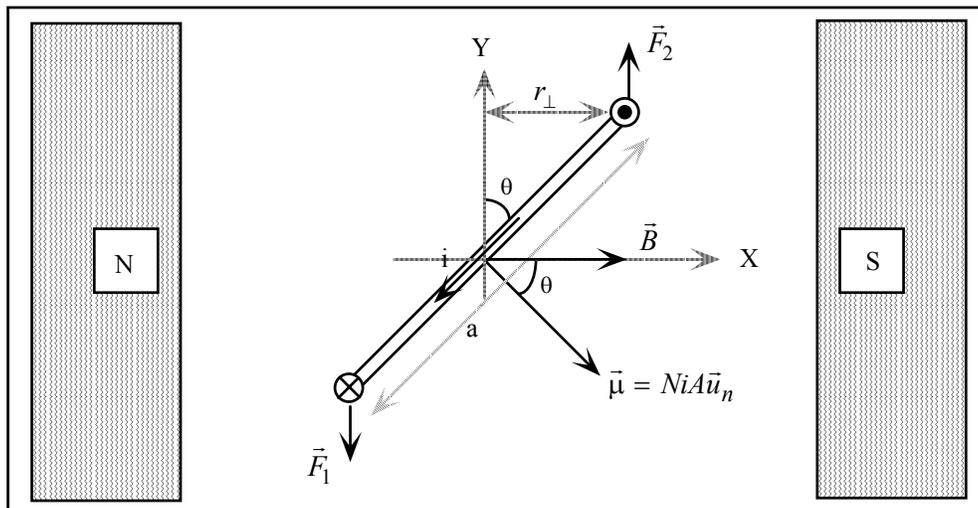
On peut montrer de manière similaire que

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$$

Alors, la somme des forces sur le cadre est nulle :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \\ \vec{F}_3 = -\vec{F}_4 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Cela implique qu'il ne peut y avoir de translation de la boucle sous l'effet de ces forces. Par contre, les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 ne sont pas dans le même plan. Il en résulte un moment de force non nul sur la boucle, comme illustré dans la figure qui suit. <



L'expression de ce moment est obtenue comme suit :

$$\begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2 \\ \tau_1 = \tau_2 = F_2 \cdot r_{\perp} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = 2\tau_2 = 2 Ni c B \left(\frac{a}{2} \sin(\theta) \right) \\ A = a c \end{cases} \Rightarrow \tau = Ni A B \sin(\theta)$$

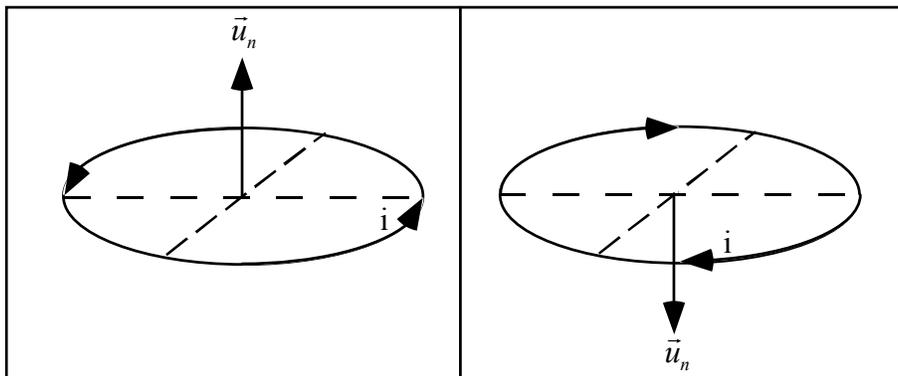
Comme le moment de force est une quantité vectorielle, que le champ magnétique \vec{B} est un champ vectoriel et que θ désigne l'angle entre le vecteur surface \vec{A} et \vec{B} , il est clair que l'expression ci-dessus exprime la grandeur du produit vectoriel de \vec{A} et \vec{B} multiplié par le scalaire Ni .

$$\begin{cases} \tau = Ni A B \sin(\theta) \\ \vec{A} = A \vec{u}_n \end{cases} \Rightarrow \vec{\tau} = Ni A (\vec{u}_n \times \vec{B})$$

Définition : Le moment dipolaire magnétique de la boucle est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = NiA \\ \vec{\mu} = NiA\vec{u}_n \end{array} \right. \quad (A \cdot m^2)$$

Remarque : Pour déterminer la direction du vecteur \vec{u}_n , on utilise la convention présentée dans la figure qui suit. La direction de ce vecteur est déterminée en fonction du sens de la circulation du courant dans la boucle et perpendiculaire au plan de celle-ci.



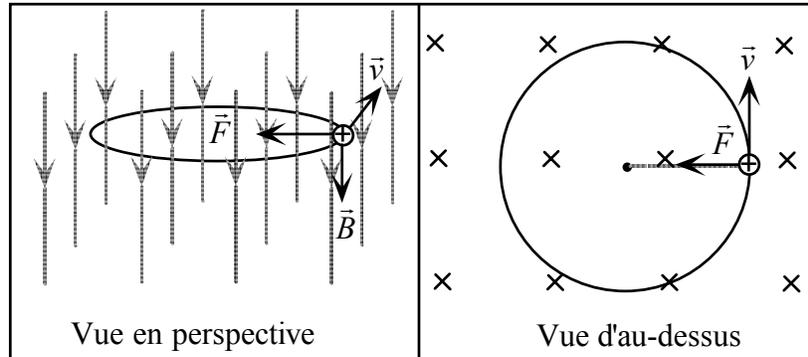
Avec la définition et la convention sur la direction du moment dipolaire magnétique, on peut exprimer le moment de force sur la boucle de courant par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \mu B \sin(\theta) \\ \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \end{array} \right.$$

En terme d'application, les résultats qui précèdent sont à la base du fonctionnement du moteur électrique. Dans le cas d'un moteur à courant continu le mouvement de rotation n'est possible qu'en changeant le sens du courant avec un dispositif de commutation approprié, sinon, il en résulterait un mouvement d'oscillation du « rotor ». De plus, pour obtenir un mouvement de rotation à peu près continu, il faut plusieurs cadres conducteurs sur le rotor. Cela contribue également à augmenter la puissance du moteur (voir l'aperçu historique sur le moteur électrique). Une autre application importante est le galvanomètre à cadre mobile.

8.4 Le mouvement des particules chargées dans un champ magnétique

Cas 1 : la vitesse \vec{v} est perpendiculaire à un champ magnétique \vec{B} uniforme



Dans ces conditions, on observe un mouvement circulaire. Pour déterminer les paramètres de ce mouvement, il faut en fait relier le mouvement circulaire à la force centripète qui l'explique. Dans ce cas, il s'agit de la force magnétique. Pour **la détermination du rayon r de la trajectoire circulaire :**

$$\begin{cases} \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} \perp \vec{B} \end{cases} \Rightarrow F = qvB \Rightarrow \begin{cases} m \frac{v^2}{r} = qvB \\ \Rightarrow \\ r = \frac{mv}{qB} \end{cases}$$

La période T de l'orbite est donnée par le temps pour parcourir la circonférence de l'orbite circulaire. Alors :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

et la fréquence f_c par

$$f_c = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

On remarque dans les expressions de la période et de la fréquence que :

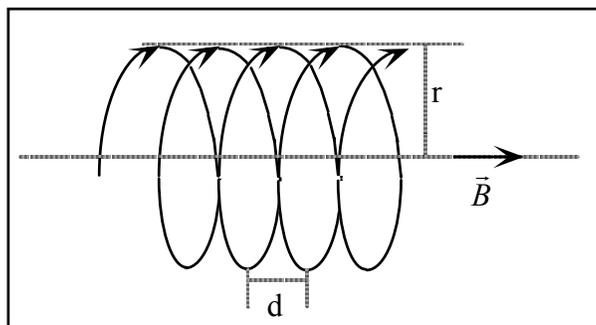
- 1) la période et la fréquence du mouvement sont toutes deux **indépendantes de la vitesse** de la particule;
- 2) toutes les particules ayant le même rapport charge/masse, q / m , ont la même période et la même fréquence;
- 3) si on connaît le rayon de la trajectoire, la vitesse et la grandeur du champ magnétique, on peut déterminer le rapport de la charge sur la masse de la particule.

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{B r}$$

C'est ce qui constitue la base du fonctionnement du spectromètre de masse.

Cas 2 : la vitesse \vec{v} comporte une composante parallèle à un champ magnétique \vec{B} uniforme

Dans ces conditions, on observe un mouvement hélicoïdal tel que la particule progresse dans la direction du champ magnétique \vec{B} avec une vitesse dont la grandeur est celle de la composante de celle-ci parallèle à \vec{B} .



Il convient d'exprimer la vitesse comme une somme de 2 composantes, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à \vec{B}

$$\vec{v} = \vec{v}_{//B} + \vec{v}_{\perp B}$$

Les 2 paramètres caractérisant la trajectoire hélicoïdale, le rayon r et le pas d sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{m v_{\perp B}}{qB} \\ d = v_{//B} T = v_{//B} \frac{2\pi m}{qB} \end{array} \right.$$

Le pas de l'hélice correspond à la distance parcourue parallèlement au champ magnétique par la particule lorsqu'elle a complété un tour dans l'hélice.

Remarque : Si la grandeur du rayon et du pas de la trajectoire d'une particule de charge et de masse connue, on peut déterminer les composantes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique, et par la suite, la grandeur de la vitesse de celle-ci.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{\perp B} = \frac{r q B}{m} \\ v_{//B} = \frac{q B d}{2\pi m} \\ v = \sqrt{v_{\perp B}^2 + v_{//B}^2} \end{array} \right.$$

Remarque : Dans un champ magnétique non uniforme, les particules chargées sont soumises à une force dirigée vers les régions où le champ magnétique est plus faible. Dans certains cas, le sens du mouvement sur la trajectoire en spirale peut être inversé. C'est la particularité du concept de bouteille magnétique. En pratique, on utilise des bouteilles magnétiques pour confiner des gaz ionisés à haute température, les plasmas. Par ailleurs, on observe ce type de confinement dans le cas des particules chargées qui proviennent de l'espace et qui forment la ceinture de Van Allen.

8.5 Force sur une particule chargée dans un champ électromagnétique

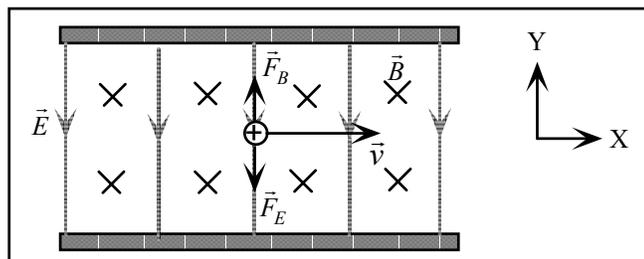
On dit qu'il existe un champ électromagnétique dans une région de l'espace si on y retrouve une superposition d'un champ magnétique et d'un champ électrique. Dans ces conditions, une particule chargée se déplaçant dans cette région serait soumise à une force électromagnétique appelée force de Lorentz dont l'expression est donnée par :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Le mouvement de la particule peut être déterminé en résolvant le système d'équations différentielles qui suit :

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2x}{dt^2} = qE_x + q\left(\frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y\right) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = qE_y + q\left(\frac{dz}{dt}B_x - \frac{dx}{dt}B_z\right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = qE_z + q\left(\frac{dx}{dt}B_y - \frac{dy}{dt}B_x\right) \end{array} \right.$$

En général, le mouvement sera complexe. Toutefois, il existe des cas particuliers importants pour lesquels l'analyse du mouvement est considérablement simplifiée. C'est le cas de la configuration utilisée pour les sélecteurs de vitesse. Dans cette configuration, les champs magnétique et électrique sont perpendiculaires et l'effet recherché est de sélectionner les seules particules qui ont exactement la même vitesse. De plus, les grandeurs des champs magnétique et électrique sont telles que seules les particules ayant une certaine vitesse ne sont pas déviées.



Dans cette figure, l'axe des Z sort du plan de celle-ci. Alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = -B\vec{k} \\ \vec{v} = v\vec{i} \Rightarrow \vec{F}_B = qvB\vec{j} \\ \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{E} = -E\vec{j} \Rightarrow \vec{F}_E = -qE\vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_E = q(vB - E)\vec{j}$$

Si la force résultante de la particule est nulle, la trajectoire de celle-ci est une droite, ce qui est l'effet recherché. On doit donc avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} vB - E = 0 \\ \Rightarrow \\ v = \frac{E}{B} \end{array} \right.$$

En terme d'application, le sélecteur de vitesse est un élément essentiel des spectromètres de masse, appareils essentiels de la chimie expérimentale.

Dans le cas de l'expérience de Thompson, il aura servi à déterminer la vitesse des électrons, ce qui était essentiel pour obtenir la mesure du rapport e / m de l'électron. Ce résultat expérimental et celui de Milikan sur la mesure de la charge de l'électron ont finalement permis de déduire la masse de cette particule.

Finalement, il faut signaler les travaux de Hall qui a fait la démonstration expérimentale que les porteurs de charge dans les conducteurs métalliques sont de signe négatif. L'analyse de cette expérience fait intervenir la force de Lorentz où le champ électrique (de Hall) est celui qui est induit par la reconfiguration des porteurs de charge en raison du champ magnétique dans lequel est placé le conducteur dans lequel circule un courant.

Remarque : En général, le champ électrique qui annule localement l'effet d'un champ magnétique \vec{B} donné sur une charge $s'y$ déplaçant avec une vitesse \vec{v} est donné par :

$$\begin{cases} \vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \\ q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

On peut utiliser la forme développée de cette dernière égalité pour déterminer l'expression vectorielle du champ magnétique \vec{B} dont l'effet est d'annuler localement celui de champ électrique \vec{E} .

Exercices et problèmes sur ce chapitre

Ancienne édition

Exercices : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 28, 31, 33, 35, 39 et 45

Problèmes : 5

Nouvelle édition

Exercices : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 28, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 42 et 48

Problèmes : 4

Chapitre 9

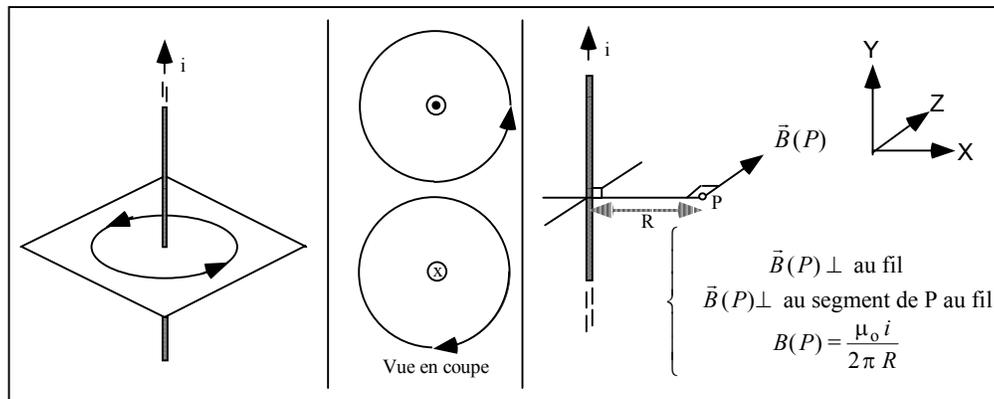
Les sources de champ magnétique

9.1 Introduction

Le chapitre précédent se résume à l'examen de l'effet d'un champ magnétique sur des particules chargées qui se déplacent dans celui-ci. Celui-ci repose sur les travaux de Oersted qui a fait la démonstration que des charges en mouvement et des courants dans des conducteurs produisent dans leur voisinage des champs magnétiques. Ce chapitre apporte des réponses à la détermination du champ magnétique produit par des charges en mouvement et par un courant dans un conducteur. Les techniques de calcul qui sont introduites font intervenir la loi de Biot-Savart, le théorème d'Ampère et le principe de superposition. Ces techniques permettent entre autres de constituer une table des champs magnétiques associés aux configurations courantes utilisées dans différents mécanismes.

9.2 Le champ d'un long fil conducteur rectiligne

Un long fil droit dans lequel circule un courant i (A) produit un champ magnétique dont les lignes de champ sont circulaires. Comme dans le cas des champs électriques, on utilise les lignes de champ pour illustrer le champ magnétique. En tout point de celles-ci, le champ est tangent. La figure qui suit résume la situation concernant les lignes de champs, la grandeur et la direction du champ au point P.



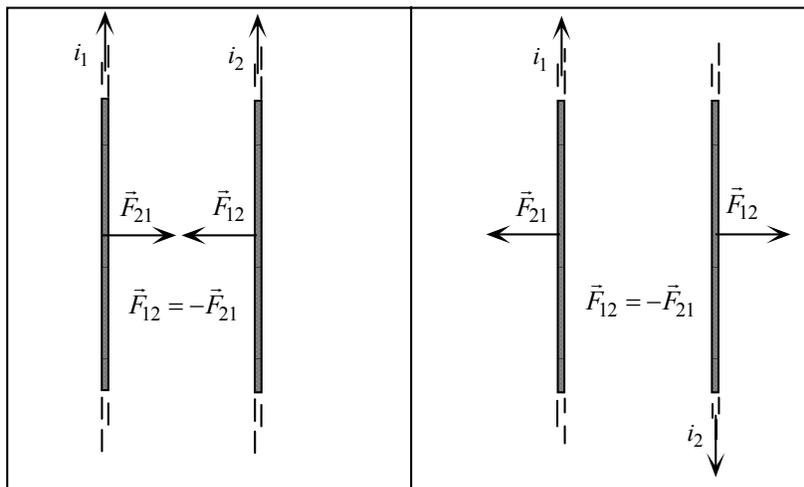
La constante μ_0 figurant dans l'expression de la grandeur du champ magnétique $B(P)$ est la *constante de perméabilité du vide*. Cette constante est reliée à la propagation du champ magnétique. Plus précisément, la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide qui est

celle de la lumière s'exprime en fonction de cette constante et de la permittivité du vide ϵ_0 comme suit :

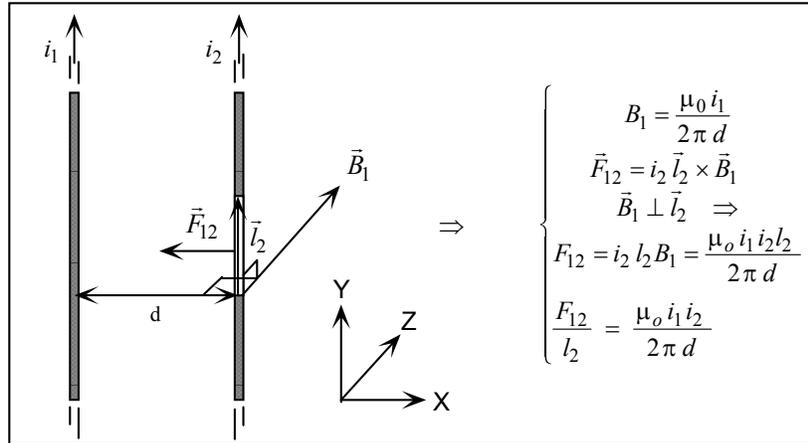
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

9.3 Force entre deux longs fils parallèles

La figure qui suit illustre la direction des forces entre les 2 fils. Ces forces sont égales en grandeur, mais de directions opposées. Les forces sont attractives si les courants vont dans la même direction, mais répulsives dans le cas contraire. On peut montrer que ces forces sont égales en grandeur, indépendamment de la longueur des fils en présence.



Pour calculer la force sur une partie de longueur l_2 du fil (2), il suffit de constater que le fil (1) produit un champ magnétique dont l'effet est une force sur le fil (2) puisque celui-ci porte un courant. La figure qui suit résume la situation.



9.4 Calculs du champ magnétique (méthodes)

On considère trois méthodes dans ce cours :

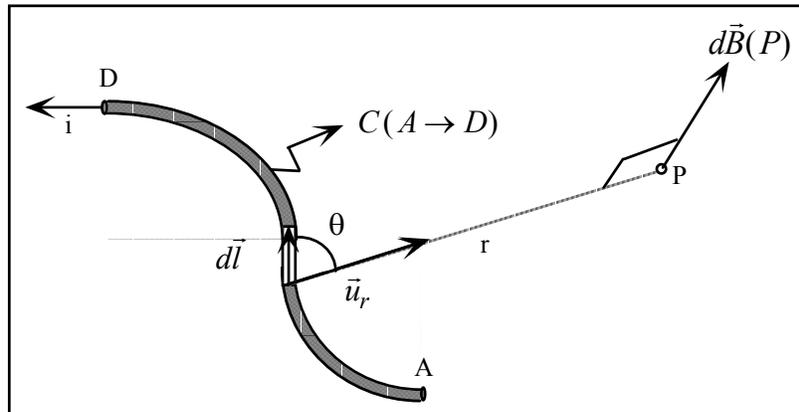
- 1) La loi de Biot-Savart, dont la démarche est analogue à celle du calcul du champ électrique par intégration ;
- 2) Le théorème d'Ampère dont la démarche est analogue au théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ;
- 3) Le principe de superposition qui permet de calculer le champ magnétique résultant de plusieurs champs magnétiques associés chacun à une configuration particulière.

On utilise les 2 premières méthodes pour calculer le champ magnétique des configurations courantes et le principe de superposition pour les cas où plusieurs configurations contribuent à créer un champ magnétique résultant dans une région de l'espace.

Pour ce qui est de la direction du champ, il est commode d'utiliser la règle de la main droite : si le pouce pointe dans la direction du courant, les doigts donnent la direction des lignes de champ.

9.5 La loi de Biot-Savart

La loi de Biot-Savart a été développée pour le calcul du champ magnétique généré par une longueur infinitésimale de fil parcouru par un courant (voir la figure).



Les recherches effectuées ont produit les résultats qui suivent.

$$\left\{ \begin{array}{l} dB(P) \text{ proportionnel à } \begin{cases} idl \\ \frac{1}{r^2} \\ \sin(\theta) \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} d\vec{B}(P) \perp d\vec{l} \\ d\vec{B}(P) \perp \vec{u}_r \end{array} \right. \text{ dans la direction de } d\vec{l} \times \vec{u}_r \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} dB(P) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i dl \sin(\theta)}{r^2} & (1) \\ d\vec{B}(P) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} & (2) \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) expriment le contenu de la loi de Biot-Savart. L'équation (2) permet également de déterminer l'expression vectorielle du champ magnétique :

$$\vec{B}(P) = \oint_{C(A \rightarrow D)} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

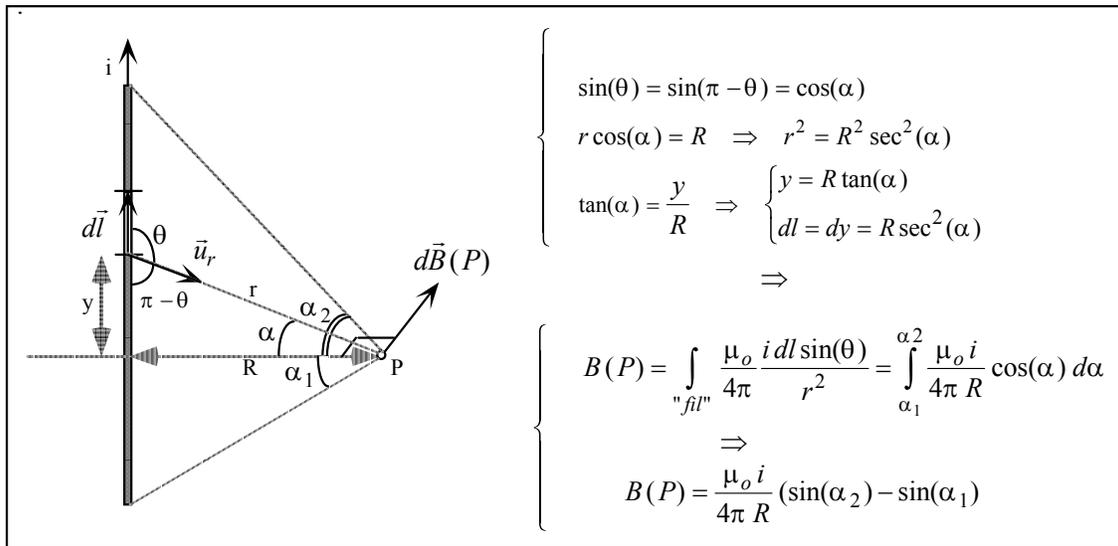
C'est la forme qu'on utilisera pour déterminer le champ magnétique de certaines configurations courantes.

Exemple : Calcul du champ magnétique dans le voisinage d'un fil de longueur finie dans lequel circule un courant

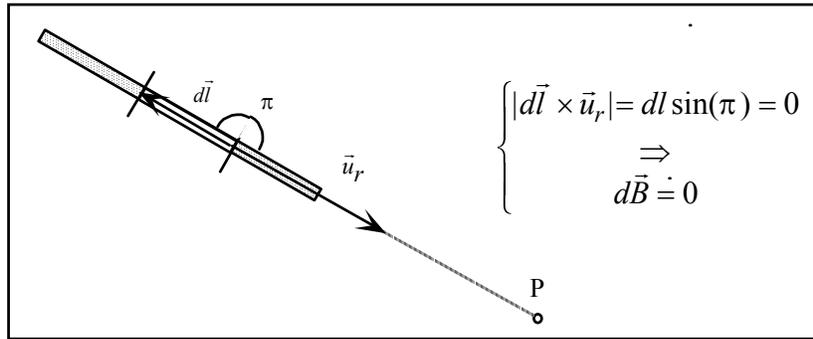
Tous les éléments produisent des contributions $d\vec{B}(P)$ dans la direction indiquée dans la figure. Par conséquent, on peut utiliser l'équation (1) pour obtenir la grandeur du champ au point P :

$$B(P) = \int dB(P) = \int_{\text{"fil"}} \frac{\mu_o i dl \sin(\theta)}{4\pi r^2}$$

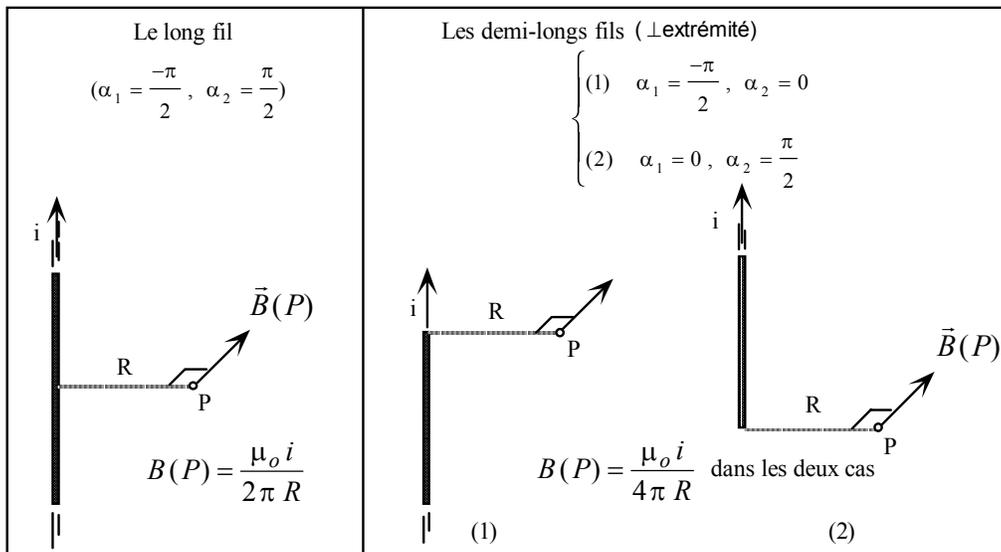
On peut déduire les relations permettant d'effectuer l'intégrale ci-dessus en considérant la figure qui suit. Le résultat de ce calcul est également présenté dans la figure.

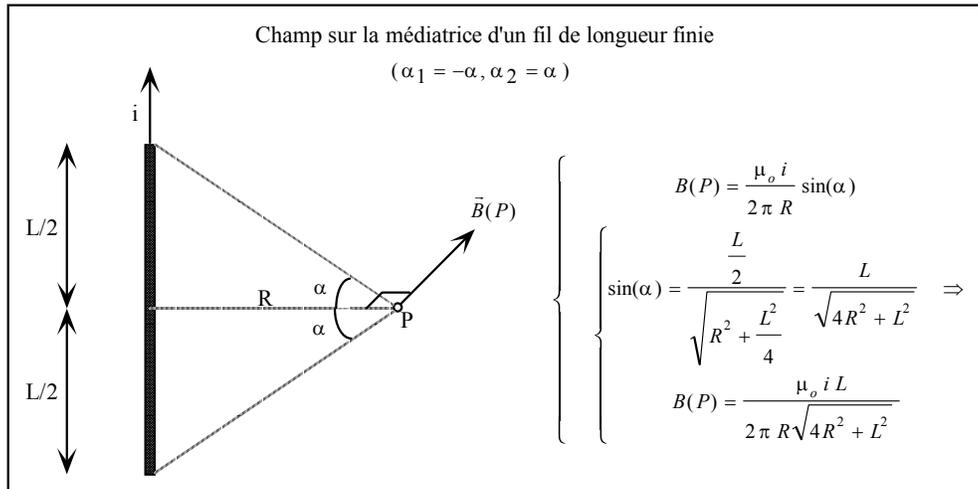


Remarque : La figure qui suit illustre le fait que la contribution $d\vec{B}(P)$ d'un élément de courant $i d\vec{l}$ est nulle lorsque cet élément pointe vers le point P (ou dans la direction inverse). **Il en est par conséquent de même pour toute portion de conducteur dirigé vers le point où l'on veut calculer le champ magnétique.**

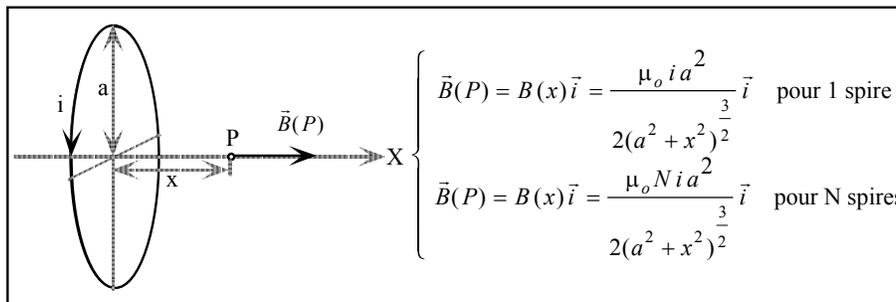


Les figures qui suivent illustrent des résultats qui se déduisent de celui obtenu précédemment pour un fil de longueur finie.

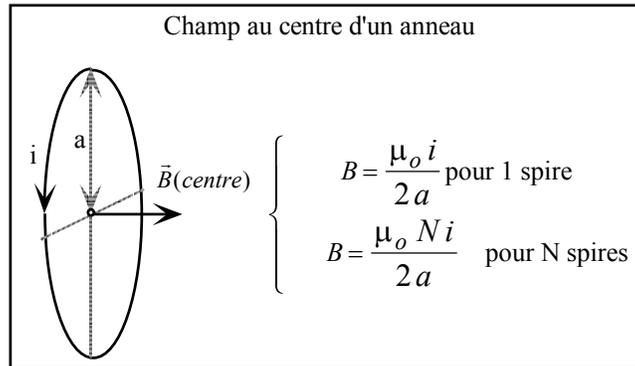




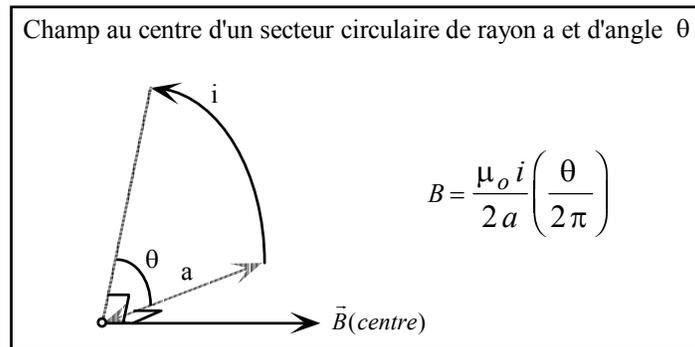
Exemple : Calcul du champ magnétique dans l'axe d'un anneau de rayon a dans lequel circule un courant i .



Exemple : Le champ magnétique au centre d'un anneau se déduit du résultat qui précède. Il suffit de poser $x = 0$.



Exemple : Le champ magnétique produit par un fil portant un courant i dont la configuration est un secteur circulaire, au centre du cercle de référence.



Remarque : Ce dernier résultat se déduit du précédent en considérant N fractionnaire, c'est-à-dire $N = \frac{\theta}{2\pi}$. Cela correspond à la portion du cercle à considérer.

Plusieurs des exercices et des problèmes se font aisément en utilisant les résultats qui précèdent. Il faut toutefois utiliser en plus le principe de superposition, sans oublier que le champ magnétique est un champ vectoriel.

9.6 Le théorème d'Ampère

Essentiellement, le théorème d'Ampère établit une relation entre un courant et le champ magnétique qu'il produit. Les travaux de Maxwell ont apporté une généralisation à cette relation pour y inclure la notion de *courant de déplacement*. Avec cet ajout, le théorème d'Ampère constitue la troisième équation de Maxwell. Il est possible de déduire ce théorème à partir de l'expression de la loi de Biot-Savart, mais il est également possible de l'introduire sur une base plus simple en considérant le champ magnétique d'un long fil.

Le champ d'un long fil est donné par

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$$

On peut écrire cette relation suivant

$$B(2\pi r) = \mu_o i \quad (1)$$

Et on remarque que

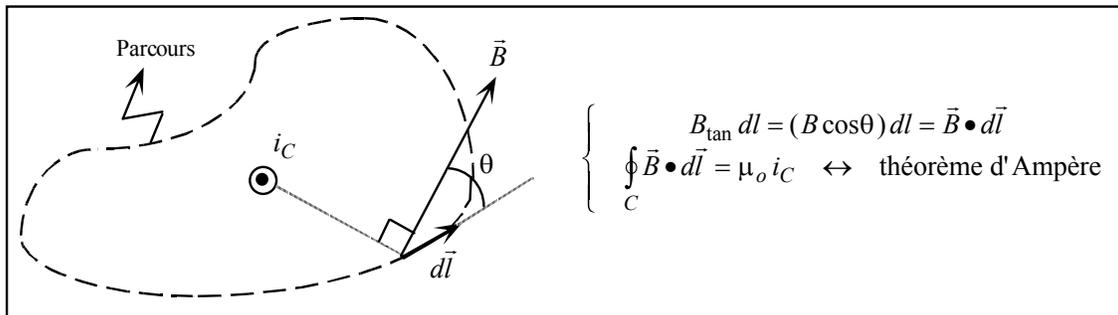
$$\begin{cases} B_1(2\pi r_1) = \mu_o i \\ B_2(2\pi r_2) = \mu_o i \end{cases} \quad (2)$$

où B_1 est le champ à une distance r_1 et B_2 le champ à une distance r_2 .

On peut interpréter le résultat (1) de la manière suivante : le produit de $2\pi r$, la longueur d'un parcours circulaire autour du conducteur, et de B la composante tangentielle au parcours est égale au produit de la constante μ_o et de i , le courant traversant la surface limitée par le parcours.

Dans le cas du résultat (2), on remarque que le produit de la composante tangentielle du champ avec la longueur du parcours donne le même résultat sur 2 parcours différents. Ampère a démontré que cette relation entre le champ magnétique sur un parcours fermé et le courant traversant la surface délimitée par le parcours est tout à fait générale.

La figure qui suit présente le théorème d'Ampère.



Remarque : Seul le courant i_C qui traverse la surface délimitée par la courbe figure dans le terme de droite du théorème d'Ampère.

L'utilisation du théorème d'Ampère pour le calcul du champ magnétique repose sur les conditions suivantes :

1. La géométrie du flux du courant doit avoir une symétrie suffisante pour que le calcul de l'intégrale reste simple
2. Il faut choisir le parcours d'intégration qui convient à la configuration du champ. De manière plus spécifique, le parcours est choisi de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \text{ est ou } \perp \text{ à } d\vec{l} \text{ sur } C \\ \text{Là où } \vec{B} \text{ est } \parallel \text{ à } d\vec{l} \text{ sur } C, B = \text{cte} \end{array} \right.$$

Le champ magnétique de chacune des configurations qui suivent peut être obtenu en utilisant le théorème d'Ampère.

- 1) **Champ magnétique d'un long cylindre conducteur** de rayon R dans lequel circule un courant i dont la densité est uniforme dans toute sa section.

$$\left\{ \begin{array}{l} r < R \quad (\text{intérieur}) \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \\ r \geq R \quad (\text{extérieur}) \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \end{array} \right.$$

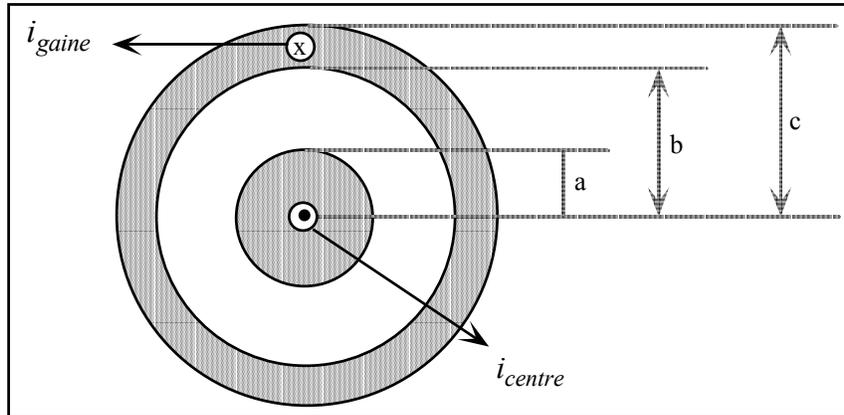
- 2) **Champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde.** Le long solénoïde constitué de n (spires / m) (ou constitué de N spires et de longueur l) dans lequel circule un courant i . Dans la région centrale, à l'intérieur, le champ est uniforme, parallèle à l'axe et dont la grandeur est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \mu_0 n i \quad \text{si on donne directement le nombre } n \text{ de spires par mètre} \\ B = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) i \quad \text{si on donne le nombre de spires } N \text{ et la longueur } l \end{array} \right.$$

- 3) **Le champ magnétique d'une bobine toroïdale**

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \mu_0 \left(\frac{N}{2\pi r} \right) i \quad \text{où } r \text{ désigne la distance à l'axe} \\ B = 0 \quad \text{à l'extérieur} \end{array} \right.$$

- 4) **Le champ magnétique d'un coaxial.** Les courants dans le cylindre central (i_{centre}) et dans la gaine (i_{gaine}) sont de même grandeur (i), mais de directions opposées.



$$\left\{ \begin{array}{l} r < a \rightarrow B(r) = \frac{\mu_o i r}{2\pi R^2} \\ a \leq r \leq b \rightarrow B(r) = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \\ b < r < c \rightarrow B(r) = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \left(1 - \left(\frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) \right) \\ r > c \rightarrow B(r) = 0 \end{array} \right.$$

Exercices et problèmes sur le chapitre 10

Ancienne édition

Exercices : 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 29 et 31

Problèmes : 2 et 4

Nouvelle édition

Exercices : 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 31

Problèmes : 2 et 4

Chapitre 10

La loi de Faraday

10.1 Introduction

Ce fut le physicien américain Joseph Henry qui, le premier, réussit à « convertir le magnétisme en électricité ». Il eut l'idée de placer un barreau entre les 2 pôles d'un électro-aimant et d'enrouler une bobine de fil isolé autour du barreau. Ayant relié les bornes de la bobine à un galvanomètre, il observa une déviation momentanée de l'aiguille du galvanomètre au passage du courant dans l'électro-aimant, alors qu'il n'y avait aucune connexion électrique entre la bobine et les fils de l'électro-aimant. Il avait ainsi découvert la présence d'un courant induit dans la bobine lorsque le champ magnétique qui la traverse varie. Un an plus tard et indépendamment, Michael Faraday fit la même découverte avec un montage similaire, interpréta correctement les résultats obtenus et les publia.

L'induction électromagnétique désigne 2 phénomènes distincts :

- **la création d'un courant induit dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique . Cet effet peut être déduit de ce que l'on sait de la force magnétique sur des charges en mouvement. En effet, les porteurs de charge se déplacent avec le conducteur dans un champ magnétique. La force qui s'exerce alors sur ceux-ci génère le courant induit dans le conducteur.**
- **la création d'un champ électrique associé à un champ magnétique variable dans le temps. Ainsi on observe les effets d'un champ électrique induit dans un circuit quelconque, dans le vide ou dans la matière, placé dans un champ magnétique variable.**

L'induction électromagnétique est à l'origine du fonctionnement des générateurs et des transformateurs. D'autre part, de même qu'un champ magnétique variable génère un champ électrique, un champ électrique variable génère un champ magnétique. Ces deux phénomènes sont à la base du processus de propagation des ondes électromagnétiques.

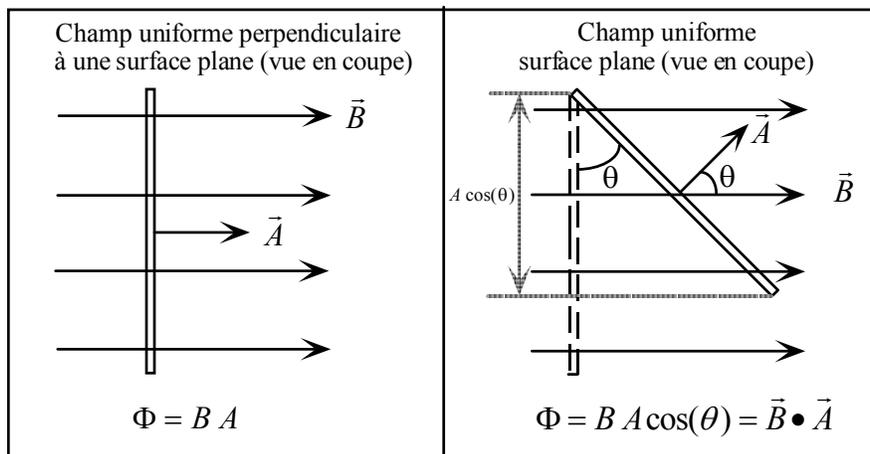
10.2 Le flux magnétique

Dans les trois expériences qui suivent, un courant induit est créé dans un conducteur.

1. Le mouvement relatif d'un aimant par rapport à un anneau conducteur.
2. Le changement de l'aire d'un anneau conducteur dont la surface est traversée par un champ magnétique.
3. Le changement de l'orientation de la surface d'un anneau conducteur dans un champ magnétique.

Ces trois expériences permettent de déduire que la variable importante pour expliquer la création d'un courant induit dans chacune de ces expériences est le flux du champ magnétique. Toute variation de celui-ci à travers la surface de l'anneau conducteur génère un courant induit dans cet anneau.

La figure qui suit présente la définition du flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface plane.



L'unité SI de flux magnétique est le weber (Wb) .

Si le champ \vec{B} n'est pas uniforme et/ou la surface A n'est pas plane, le flux est donné par

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

L'une des propriétés importantes du champ magnétique s'illustrant dans la configuration des lignes de champ est que celles-ci sont des courbes fermées. Cela implique que le flux total du champ magnétique sur toute surface fermée est nul :

$$\int_{S_{\text{fermée}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Cette relation est la forme intégrale de la deuxième équation de Maxwell. En terme d'interprétation physique, elle exprime la non existence des monopoles magnétiques. Cela signifie, par exemple, que la division d'un aimant en donne deux, avec chacun un pôle nord et un pôle sud.

10.3 La loi de Faraday

La loi de Faraday, telle qu'énoncée par celui-ci, s'exprime ainsi :

« La force électromotrice induite dans un circuit fermé est proportionnelle au taux de variation du flux du champ magnétique traversant la surface délimitée par le circuit par rapport au temps »

On a pu démontrer par la suite que l'expression de la f.é.m (qui s'exprime en volts) est donnée par :

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Le signe négatif qui apparaît dans cette expression s'explique avec la loi de Lenz qui sera introduite dans la section qui suit.

Si on considère une boucle conductrice constituée de N spires, on obtient

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt}$$

Dans cette expression, la quantité $N\Phi$ désigne le flux total à prendre en considération dans le calcul de la f.é.m., égale à la somme des flux Φ à travers chacune des spires. Il convient également de signaler que la f.é.m n'est pas confinée en un point particulier de l'espace. Elle se manifeste, associée à un champ électrique dont l'action est la création d'un courant induit dans les spires de la boucle conductrice .

Pour une spire on peut exprimer la relation entre le champ électrique induit \vec{E}_i et la f.é.m ε_1 par

$$\varepsilon_1 = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

Pour N spires on trouve donc

$$\varepsilon = N \varepsilon_1$$

puisque les spires produisent chacune des f.é.m en séries.

On peut développer l'expression de la f.é.m induite en utilisant l'expression du flux déterminée précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} N\Phi = N\vec{B} \cdot \vec{A} = NBA \cos(\theta) \\ \varepsilon = -\frac{d(N\Phi)}{dt} \\ \Rightarrow \end{array} \right. \\ \varepsilon = -NA \cos(\theta) \left(\frac{dB}{dt} \right) - NB \cos(\theta) \left(\frac{dA}{dt} \right) + NBA \left(\sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right) \end{array} \right.$$

Il convient d'interpréter les trois termes figurant dans l'expression de la f.é.m. ε obtenue, chacun référant à un processus particulier.

Il faut également souligner que plus d'un processus peut être en cause dans la variation du flux. Il faut alors les prendre en considération en les intégrant explicitement au calcul du flux.

- **Champ magnétique variable**

Dans le cas d'un champ magnétique variable, le premier terme du développement de la f.é.m donne l'expression de la f.é.m. induite par ce processus

$$\frac{dB}{dt} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = -NA \cos(\theta) \left(\frac{dB}{dt} \right)$$

(voir les exercices 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 17 et 19, les problèmes 7 et 10 du livre de référence) .

- **Aire variable**

Dans le cas aire variable, le deuxième terme du développement de la f.é.m donne l'expression de la f.é.m. induite par ce processus

$$\frac{dA}{dt} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_A = -NB \cos(\theta) \left(\frac{dA}{dt} \right)$$

(voir les exercices 10,11 et 18, ainsi que le problème 2 du livre de référence) ;

- **Orientation relative variable**

Dans le cas orientation variable, le troisième terme du développement de la f.é.m donne l'expression de la f.é.m. induite par ce processus

$$\frac{d\theta}{dt} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = N B A \sin(\theta) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)$$

(voir les exercices 16, 19, 20, 21, et 22 du livre de référence).

10.4 La loi de Lenz

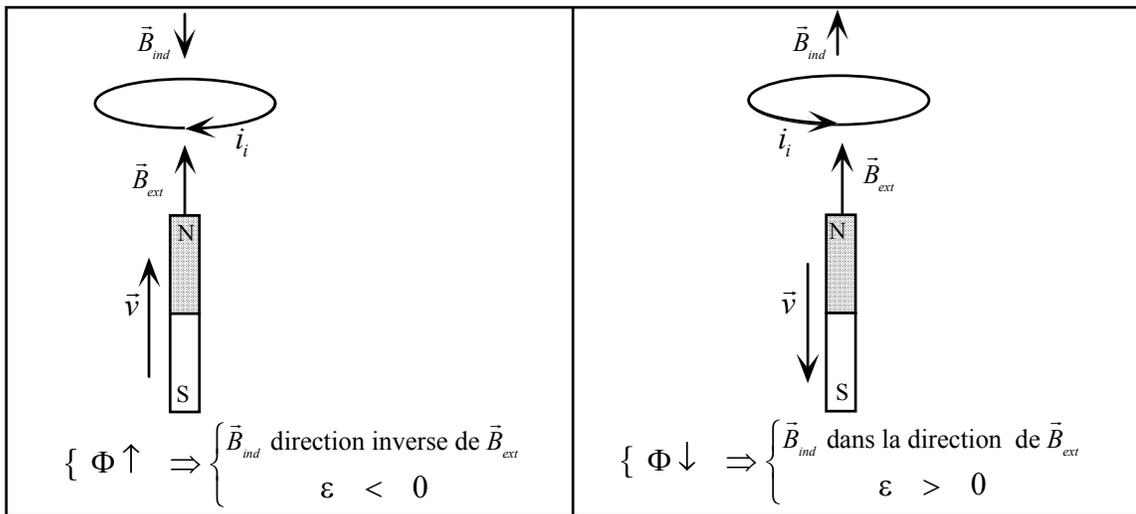
Maxwell proposa la formulation suivante de la loi de Lenz, formulation permettant de déduire le sens du courant induit par la force électromotrice induite :

« L'effet de la f.é.m. induite est tel qu'il s'oppose à la variation de flux qui le produit »

La formulation suivante est plus « opérationnelle » met en relation le champ magnétique induit et le courant induit dans le cadre de la loi de Lenz:

« Le courant induit circule de manière à produire un champ magnétique induit \vec{B}_i dont l'effet est de contrer la variation de flux du champ extérieur \vec{B} qui produit ce courant ».

La figure illustre la formulation proposée.



En 1851, von Helmholtz fit remarquer que cette loi est en fait une conséquence de la loi de la conservation de l'énergie. De fait, si le champ magnétique induit venait renforcer le champ extérieur, il entraînerait une augmentation du courant induit qui à son tour viendrait augmenter le champ induit, augmentant ainsi le courant induit et ainsi de suite. Il est clair que cette escalade est impossible au plan énergétique. On verra plus loin qu'il faut transformer de l'énergie mécanique pour produire de l'énergie électrique.

Le signe (-) dans l'expression déterminée de ε dans le contexte d'une application particulière signifie que le champ magnétique induit \vec{B}_i associé au courant induit est dans la direction inverse du champ magnétique extérieur \vec{B} . Si le signe est positif, \vec{B}_i est dans la direction de \vec{B} . Cela permet de déterminer la direction du courant induit.

10.5 Cheminement habituel pour la résolution des problèmes

Pour résoudre les exercices reliés aux calculs des f.é.m. induites, il faut généralement procéder en suivant les étapes qui suivent.

1. Identifier le (ou les) processus produisant la variation du flux du champ magnétique.
2. Déterminer l'expression du flux total

$$\Phi_{tot}(t) = N\varphi_1(t)$$

où $\varphi_1(t)$ désigne le flux dans une spire et N le nombre total de spires dans lesquelles est produite la variation de flux.

3. Déterminer l'expression de la f.é.m.

$$\varepsilon = - \frac{d(N\varphi_1(t))}{dt} .$$

4. Utiliser la loi de Lenz pour déterminer le sens du courant induit i_i .

Si le circuit comporte une résistance R , le courant dans celle-ci est donné par

$$i_i = \frac{|\varepsilon|}{R}$$

et la puissance dissipée est donnée par

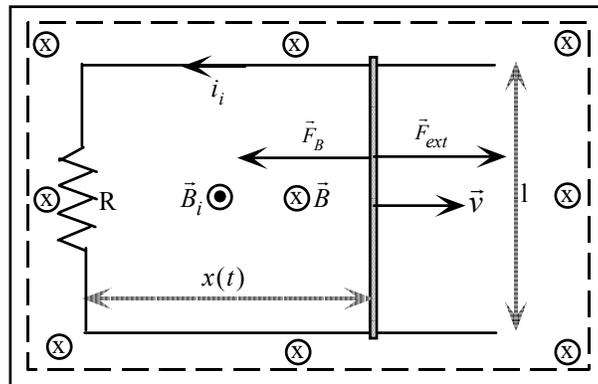
$$P = R i_i^2 .$$

Finalement, les expressions qui précèdent dépendent généralement du temps. Dans ces conditions, il faut parfois calculer la valeur numérique de ces expressions à des instants donnés.

10.6 Analyse d'un cas

L'analyse du cas examiné dans cette section vise à démontrer que pour produire de l'énergie électrique, il faut transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique.

La figure qui suit illustre une tige conductrice se déplaçant à une vitesse \vec{v} constante sur un rail conducteur comportant une résistance R . Ce circuit est situé dans un champ magnétique uniforme \vec{B} entrant et perpendiculaire au plan de la surface formée par le rail et la tige.



Dans ce cas, le processus provoquant la variation du flux en est un à surface variable.

1. Le flux est donné par

$$\Phi = Blx(t) \quad \text{où} \quad x(t) = x_o + vt$$

2. La force électromotrice induite est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} A = lx(t) \\ \Rightarrow \Phi = Blx(t) = Bl(x_0 + vt) \\ \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \end{array} \right.$$

3. Dans cet exemple, le signe (-) dans l'expression déterminée de ε signifie que le champ magnétique induit \vec{B}_i , associé au courant induit est dans la direction inverse du champ magnétique extérieur \vec{B} . Cela permet de déterminer la direction du courant induit. Dans cet exemple, cela permet de conclure que le courant induit circule dans le sens anti-horaire, tel qu'illustré dans la figure. L'expression du courant induit est donnée par

$$i_i = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

4. La puissance instantanée dissipée dans la résistance est donnée par

$$P = R i_i^2 = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

5. Du fait qu'un courant circule dans la tige, celle-ci sera soumise à une force

$$\begin{cases} \vec{F}_B = i_l \vec{l} \times \vec{B} \quad \text{où } \vec{B} \perp \vec{l} \\ F_B = \left(\frac{Blv}{R} \right) lB = \frac{B^2 l^2 v}{R} \end{cases}$$

dirigée vers la gauche. Pour maintenir la vitesse \vec{v} constante, il faudra donc qu'une force extérieure s'exerce sur la tige. Cette force doit être dans la direction inverse et de même grandeur que \vec{F}_B . On a donc

$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} = -\vec{F}_B \\ F_{ext} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \end{cases}$$

La puissance extérieure instantanée associée à cette force est donnée par

$$\begin{cases} P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} \\ P_{ext} = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \end{cases}$$

Il est important de signaler que la puissance extérieure instantanée pour maintenir constante la vitesse de la tige est précisément égale à la puissance instantanée dissipée dans la résistance. Au plan de l'interprétation, il est clair que pour maintenir cette puissance dissipée en chaleur dans la résistance, il faut une source d'énergie extérieure et que le circuit de la figure illustre une manière de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique.

Exercices et problèmes sur ce chapitre

Ancienne édition ou nouvelle édition du livre de référence

Exercices : 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 17, 19 et 21
problèmes : 1, 7 et 9