

39

Bases de l'électrostatique



CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736–1806)

39.1 Lois de base de l'électrostatique

39.1.1 Les lois de Coulomb

Les lois de l'électromagnétisme

Vers le début du XIX^{ème} siècle, Henry Cavendish et Charles Augustin de Coulomb inaugurent l'ère des mesures quantitatives électromagnétiques. Cavendish sera l'auteur des notions de potentiel et de capacité et Coulomb l'auteur de la démonstration expérimentale de la loi de force proportionnelle à l'inverse du carré de la distance des charges¹ qui porte son nom.

Cependant, nous baserons l'ensemble des développements qui suivent sur les équations de Maxwell déjà admises, dont on peut constater qu'en *régime permanent*, elles mènent à un découplage des équations magnétiques $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et des équations électriques $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$.

Dans toute la suite, nous qualifierons de régime électrostatique une situation à courant \vec{j} nulle, en *régime permanent*, caractérisée par l'absence de tout champ magnétique ($\vec{B} = \vec{0}$) et donc du potentiel associé ($\vec{A} = \vec{0}$).

Grandeurs électriques

Les grandeurs qui jouent le rôle de *sources* du champ électrostatique sont les *charges électriques*. Il s'agit d'une caractéristique intrinsèque des particules en interaction, invariante par changement de référentiel.

¹Pour établir cette loi, Coulomb construira la balance de torsion qui porte son nom, et réalisera des mesures d'une grande finesse. On lui doit aussi l'expression des lois du frottement sec ; par ailleurs, il jouera un rôle important dans la mise en place du système Napoléonien des lycées en France, poursuivant sa carrière en tant qu'inspecteur général de l'Instruction Publique.

La charge électrique d'un système est aussi conservée lors de toutes les interactions, et sa valeur sera mesurée en *coulomb* (symbole C)². L'effet d'une répartition statique de charges sur une *charge d'épreuve* q_e placée au point M est une *force* $\vec{F} = q_e \vec{E}(M)$ où le *champ électrostatique* est la grandeur fondamentale de l'électrostatique ; il se mesure en *volt par mètre* $V \cdot m^{-1}$. On définit aussi le *potentiel électrostatique* $V(M)$ par la relation³ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et cette grandeur se mesure en *volt* (symbole V).

On peut aussi écrire la relation entre champ et potentiel sous la forme différentielle ou intégrale :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \iff V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Notons encore que la force subie par une charge d'épreuve peut s'écrire $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(q_e V)$, ce qui montre que l'*énergie potentielle d'interaction* d'une charge d'épreuve q_e située au point M avec l'ensemble d'une distribution de charge \mathcal{D} créant le potentiel $V(M)$ peut s'écrire :

$$E_p = q_e V(M)$$

Le potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique est un intermédiaire obligé de la résolution des problèmes électrostatiques, via l'équation de Poisson, qui prend en électrostatique la forme :

$$\Delta V(M) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(M) \quad (39.1)$$

La solution générale de cette équation a été présentée en régime variable sous le nom d'*équation aux potentiels retardés* ; dans le cas statique, elle prend la forme simple :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau(P) \quad (39.2)$$

où l'intégrale porte sur l'ensemble des points chargés P , appartenant à la distribution de charges \mathcal{D} . On notera que cette expression sous entend en général que le potentiel tend vers zéro lorsque M s'éloigne indéfiniment de la distribution \mathcal{D} .

On peut bien sûr aussi rencontrer des distributions de charge surfaciques, filiformes ou discrètes ; selon le cas, on adoptera des notations adaptées, que nous noterons en général :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{dq(P)}{PM}$$

Dans l'expression ci-dessus, on peut noter la valeur numérique de la constante $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ (constante de Coulomb), soit $K = 9,0 \times 10^9 \text{ SI}^4$.

On notera enfin qu'il existe certains exercices simplifiés pour lesquels la convergence de l'intégrale n'est pas assurée ; il s'agit en général de problèmes présentant une distribution de charges non physique, elle-même étendue jusqu'à l'infini. On doit alors déterminer le potentiel par d'autres méthodes, par exemple par un calcul préalable du champ électrostatique.

²Les unités électriques sont en fait dérivées des unités magnétiques qui seront définies plus loin ; l'unité de base électromagnétique du système international est l'*ampère*, symbole A. Le coulomb est alors le produit d'un ampère par une seconde, tandis que le volt est le quotient d'un watt par un ampère.

³En régime électrostatique, la condition de jauge de Lorentz prend la forme triviale $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

⁴Comme on peut le vérifier directement, la valeur élevée de la constante de Coulomb permet en général de négliger, pour une particule, les forces de pesanteur ou de gravitation devant les forces électriques.

Le champ électrostatique

Calculons le champ par application de l'opérateur gradient au potentiel, $\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}_M \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau(P)$ soit, dans les conditions d'application du théorème de dérivation sous le signe somme pour les intégrales dépendant d'un paramètre, $\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) \rho(P) d\tau(P)$ avec d'autre part⁵ $\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{1}{PM} \right) = -\frac{1}{PM^3} \overrightarrow{PM}$ d'où l'expression de l'intégrale volumique qui fournit le champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P) \quad (39.3)$$

ou, de façon plus générale, $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dq$.

39.1.2 Symétries et invariances du champ

Symétries positives du champ électrostatique

Considérons une certaine distribution de charge \mathcal{D} , invariante par une symétrie π relativement à un certain plan⁶ Π_+ , ce qui signifie que les charges $\rho(P)$ et $\rho(P')$ disposées en deux points P et $P' = \pi(P)$ symétriques relativement à Π_+ sont égales (cf. fig. 39.1).

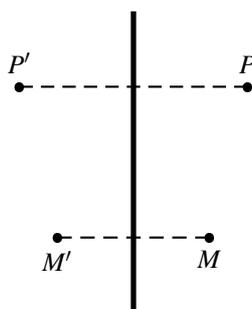


FIG. 39.1 – Plan de symétrie positive

On peut alors calculer les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ en deux points M et M' symétriques par rapport à Π_+ par des intégrales analogues ; en effet, les termes :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P') \overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3}$$

sont également symétriques par rapport à Π_+ . On en conclut :



SYMÉTRIES POSITIVES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie des charges Π_+ , sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{E}(\pi(M)) = \pi(\vec{E}(M))$$

Un cas particulier important est celui d'un point M situé sur le plan de symétrie lui-même ; ce point est confondu avec son symétrique :

$$\vec{E}(M) = \pi(\vec{E}(M))$$

⁵On peut s'assurer de la validité de cette expression en calculant ce gradient en coordonnées sphériques de centre P .

⁶Ici et dans toute la suite, on notera Π_+ un plan de symétrie positive des charges, par opposition aux plans d'antisymétrie ou plans de symétrie négative Π_- définis plus loin.

ce qui n'est possible que si ce vecteur $\vec{E}(M)$ est lui-même contenu dans le plan Π_+ :



SYMÉTRIES POSITIVES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

En un point $M \in \Pi_+$ d'un plan Π_+ de symétrie des charges, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan :

$$M \in \Pi_+ \Rightarrow \vec{E}(M) \in \Pi_+$$

Symétries négatives du champ électrostatique

Considérons une certaine distribution de charge \mathcal{D} , invariante par la composition d'une symétrie π relativement à un certain plan Π_- , et de l'opération de conjugaison de charge qui change toutes les charges en leurs opposées. Un tel plan Π_- sera indifféremment appelé *plan d'antisymétrie* ou *plan de symétrie négative* des charges.

Ceci signifie que les charges $\rho(P)$ et $\rho(P')$ disposées en deux points P et $P' = \pi(P)$ symétriques relativement à Π_- sont opposées ; le même calcul que ci-dessus montre que :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)\overrightarrow{PM}}{PM^3} \text{ et } -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P')\overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3}$$

sont également symétriques par rapport à Π_- . On en conclut :



SYMÉTRIES NÉGATIVES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie négative des charges Π_- , sont eux-mêmes antisymétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{E}(\pi(M)) = -\pi(\vec{E}(M))$$

Là aussi, un cas particulier important est celui d'un point M situé sur le plan de symétrie lui-même ; ce point est opposé à son symétrique :

$$\vec{E}(M) = -\pi(\vec{E}(M))$$

ce qui n'est possible que si ce vecteur $\vec{E}(M)$ est lui-même orthogonal au plan Π_- :



SYMÉTRIES NÉGATIVES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

En un point $M \in \Pi_-$ d'un plan Π_- d'antisymétrie des charges, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan :

$$M \in \Pi_- \Rightarrow \vec{E}(M) \perp \Pi_-$$

Invariances du champ

Considérons enfin une opération affine quelconque (translation, rotation) qui laisse invariante la distribution \mathcal{D} ; le passage du point M à son image M' par cette opération affine s'accompagne de la même opération pour le champ \vec{E} .

Nous nous servirons en général de cette propriété sous une forme restreinte, mettant à profit le caractère isométrique des transformations citées :



INVARIANCES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

Si une distribution de charges est invariante par une certaine isométrie affine, la norme du champ électrostatique est invariante par la même isométrie.

L'utilisation successive des propriétés de symétrie, puis d'invariance, permet souvent de simplifier un problème électrostatique et de déterminer le champ à partir d'une propriété globale : le théorème de Gauss.

Énergie électrostatique

Les expressions énergétiques établies dans le cadre des régimes variables restent évidemment valables dans le cas des régimes permanents.

Ainsi, l'énergie nécessaire à la constitution quasi-statique d'une distribution de charges électrostatique peut être déterminée à partir d'une répartition volumique de l'énergie $W_e = \int_{\mathbb{R}^3} w_e d\tau$ où $w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$, ce qui montre que la grandeur W_e est toujours positive.

Rappelons aussi qu'on a établi, à titre d'intermédiaire de calcul, une expression de l'énergie localisée au niveau de la distribution des charges :

$$W_e = \int_D \frac{1}{2} V(P) dq(P)$$

39.1.3 Le théorème de Gauss

Énoncé du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss garde, en régime statique, la même forme que dans le cas des régimes variables :



THÉORÈME DE GAUSS

Pour toute surface fermée (S), le flux du champ \vec{E} sortant de (S) est égal à la charge Q intérieure à (S) divisée par ϵ_0 :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Il reste naturellement possible d'utiliser le théorème de Gauss, soit sous sa forme locale $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, soit sous la forme équivalente de l'équation de Poisson $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Relations de passage

On peut aussi utiliser les relations de passage, qui gardent un régime statique la même forme qu'en régime variable ; si la surface de séparation de deux milieux (1) et (2) porte la charge surfacique σ , la discontinuité finie du champ électrostatique est donnée par :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Le champ \vec{E} étant, en présence de charges volumiques et surfaciques, *continu par morceaux*, on continuera à chercher pour le potentiel V une solution des équations de Maxwell, fonction *continue des coordonnées d'espace*.

39.2 Dipôles électrostatiques

39.2.1 Distributions dipolaires

Doublet électrostatique

On appelle *doublet électrostatique* le système formé de deux charges ponctuelles opposées, $-q$ et $+q$, disposées en deux points de l'espace P_- et P_+ tels que $\vec{P}_- \vec{P}_+ = a \vec{e}_z$. Ils forment un modèle couramment utilisé (molécules, etc..) pour des systèmes globalement neutres mais néanmoins créant un champ électrique ou subissant ses effets ; ce système est alors caractérisé par le *moment dipolaire électrique* défini par $\vec{p} = +q \vec{OP}_+ - q \vec{OP}_- = qa \vec{e}_z$.

Distribution dipolaire électrique

Nous généraliserons la notion ci-dessus en appelant *distribution dipolaire* tout ensemble de charges qui vérifie les deux propriétés suivantes⁷ :

- La charge totale de la distribution est nulle, $Q = \int_{\mathcal{D}} \rho(P) d\tau = 0$;
- Le moment dipolaire électrique est non nul, $\vec{p} = \int_{\mathcal{D}} \rho(P) \vec{OP} d\tau \neq \vec{0}$.

Le doublet électrostatique est un cas particulier de dipôle ; le notion de dipôle est toutefois ici étendue à un cadre beaucoup plus général, celui de tous les systèmes étendus, de charge totale nulle, tels que les barycentres des charges négatives et positives ne sont pas confondus⁸.

39.2.2 Dipôle électrique actif

Le potentiel dipolaire

Le potentiel créé en un point M par une distribution de charge dipolaire disposée autour du point O peut, si la distance $OM = r$ est suffisamment élevée pour effectuer un développement limité de PM au voisinage de OM , se calculer selon l'expression approchée $PM^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 \simeq OM^2 \left[1 - 2 \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OM}}{OM^2} \right]$ d'où encore $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{OM} \left[1 + \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OM}}{OM^2} \right]$, ce qui permet d'écrire :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{OM} \int_{\mathcal{D}} \rho(P) d\tau}_{\text{terme monopolaire}} + \underbrace{\frac{1}{OM^3} \vec{OM} \cdot \int_{\mathcal{D}} \rho(P) \vec{OP} d\tau}_{\text{terme dipolaire}} \right]$$

soit encore, le terme monopolaire étant ici nul puisque la charge totale l'est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3} \quad (39.4)$$

On peut aussi réécrire cette expression en utilisant les coordonnées sphériques de centre O et d'axe aligné avec \vec{p} sous la forme :

$$V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

On notera la décroissance en $1/r^2$, plus rapide que la décroissance en $1/r$ obtenue pour le potentiel créé par une charge ponctuelle (ou pour un potentiel de dipôle rayonnant).

Le champ dipolaire

Le gradient du potentiel ci-dessus se calcule aisément en coordonnées sphériques ; l'expression du champ dipolaire correspondant est :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] \quad (39.5)$$

On notera la décroissance en $\frac{1}{r^3}$, plus rapide que la décroissance en $\frac{1}{r^2}$ obtenue pour le potentiel créé par une charge ponctuelle, mais aussi beaucoup plus rapide que la décroissance en $\frac{1}{r}$ obtenue pour le champ rayonné par un dipôle oscillant. On peut aussi éventuellement utiliser l'expression dite intrinsèque du même champ, qui prend la forme (indépendante de tout système de coordonnées) :

⁷Notons que dans ce cas la définition du moment dipolaire électrique \vec{p} est indépendante du choix de l'origine O .

⁸La notion présentée ici est un cas particulier de la notion de *développement multipolaire*, notion qui s'étend à tous les calculs de champs newtoniens, même si la charge globale (ou la masse globale, pour un champ de gravitation) n'est pas nulle. Dans le développement, les termes d'ordre n relativement à la dimension de la distribution prennent le nom de *termes 2ⁿ-polaires*.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} [3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - \vec{p} (r^2)]$$

On obtient cette expression à partir du potentiel en remarquant que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}}g + g \overrightarrow{\text{grad}}f \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3} \vec{p} \cdot \vec{r}\right) = \frac{1}{r^3} \vec{p} - \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r})$$

Lignes de champ

L'équation différentielle des lignes de champ du dipôle à grande distance de celui-ci peut s'écrire $\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta}$ qui s'intègre sous la forme de l'équation $r = r_0 \sin^2\theta$; la forme des lignes de champ correspondantes est indiquée sur la figure 39.2.

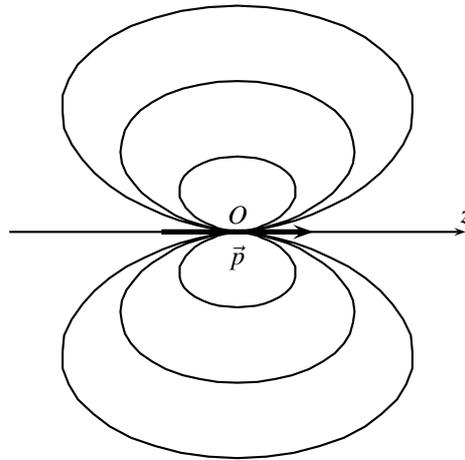


FIG. 39.2 – Lignes de champ du champ dipolaire

39.2.3 Dipôle électrique passif

Résultante des efforts subis

Considérons un dipôle soumis aux effets d'un champ électrostatique extérieur \vec{E}_0 . Si la dimension a de la distribution est nettement plus petite que les dimensions caractéristiques de variation de \vec{E}_0 , la résultante des efforts extérieurs subis par cette distribution dipolaire s'écrit $\vec{F} = \int_{\mathcal{D}} \rho(P) \vec{E}_0 d\tau = \vec{0}$ et, à l'ordre le plus bas du développement, la résultante des efforts extérieurs est nulle ; le torseur des forces agissant sur un dipôle est un *couple*.

On peut toutefois donner une expression développée à l'ordre ultérieur de cette force, si le champ \vec{E}_0 n'est pas tout à fait uniforme. Calculons par exemple la composante F_x de cette force, sous la forme $F_x = \int_{\mathcal{D}} \rho(P) E_{0x}(P) d\tau$ où le développement de $E_{0x}(P)$ s'écrit, au premier ordre, $E_{0x}(P) = E_{0x}(O) + \overrightarrow{\text{grad}}E_{0x} \cdot \overrightarrow{OP}$ ce qui permet d'écrire $F_x = \overrightarrow{\text{grad}}E_{0x} \cdot \vec{p}$ ou, sous une forme condensée, $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}_0$.



DIPÔLE ÉLECTRIQUE PASSIF

La résultante des efforts extérieurs subis par une distribution dipolaire de moment \vec{p} de la part d'un champ électrique extérieur non uniforme \vec{E}_0 est donnée par :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}_0$$

Toutefois, nous poursuivrons le calcul des autres éléments dynamiques (couple, énergie potentielle) à l'ordre zéro seulement.

Moment des efforts subis

S'agissant d'un couple, le moment des efforts électriques subis par la distribution dipolaire peut être calculée en tout point ; on écrira donc $\vec{\Gamma} = \int_{\mathcal{D}} \vec{OP} \wedge \rho(P) \vec{E}_0 d\tau = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$.



DIPÔLE ÉLECTRIQUE PASSIF

Le torseur des efforts extérieurs subis par une distribution dipolaire de moment \vec{p} de la part d'un champ électrique extérieur \vec{E}_0 est un couple, de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

Énergie potentielle d'interaction

On peut encore caractériser l'interaction de ce dipôle avec le champ extérieur par l'intermédiaire du calcul de la somme des énergies potentielles d'interaction avec ce champ extérieur des charges qui composent le dipôle. On écrit cette somme :

$$E_p = \int_{\mathcal{D}} \rho(P) V_0 d\tau$$

en choisissant un potentiel V_0 dont découle le champ uniforme \vec{E}_0 , soit par exemple $V_0 = -\vec{E}_0 \cdot \vec{OP}$. Il vient donc immédiatement :



DIPÔLE ÉLECTRIQUE PASSIF

L'énergie potentielle d'interaction entre une distribution dipolaire de charges de moment \vec{p} avec un champ électrique extérieur \vec{E}_0 a comme expression :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Les deux expressions établies ci-dessus peuvent s'interpréter de la même manière : l'interaction du champ extérieur et de la distribution dipolaire a pour effet d'aligner le vecteur \vec{p} et le vecteur \vec{E}_0 ; lorsque cet alignement est réalisé, un état d'équilibre stable (minimum d'énergie potentielle) est réalisé.

40

Conducteurs et condensateurs



CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

40.1 Équilibre électrostatique des conducteurs

40.1.1 Propriétés fondamentales

Charges dans un conducteur

Dans la suite, nous considérerons que tous les milieux conducteurs de l'électricité vérifient la loi d'Ohm sous forme locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et l'équation de Maxwell-Ampère prend donc la forme $\frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ soit, compte tenu de l'équation de continuité, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \rho = 0$ où on a posé $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ dont la solution est $\rho(M, t) = \rho(M, 0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$; la constante de temps de l'annulation des charges en volume dans un conducteur vaut, à 300 K :

Conducteur (Cuivre)	Semi-conducteur (Silicium)	Isolant (Verre)
$\gamma = 5,7 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$	$\gamma = 3,0 \times 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$	$\gamma \simeq 10^{-12} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$
$\tau = 2,0 \times 10^{-19} \text{ s}$	$\tau = 3,0 \times 10^{-8} \text{ s}$	$\tau \simeq 10 \text{ s}$

Pour tous les milieux conducteurs et semi-conducteurs, nous considérerons donc, sauf pendant un régime transitoire à la durée toujours négligeable, que :



CHARGES DANS UN CONDUCTEUR

Le volume du conducteur C n'est pas chargé. Si la charge globale Q du conducteur n'est pas nulle, cette charge est donc portée par sa surface extérieure (S) :

$$Q_C = \int_{(S)} \sigma dS$$

Champ et potentiel dans un conducteur

L'équilibre électrostatique du conducteur impose bien sûr l'absence de tout mouvement des charges mobiles, c'est-à-dire l'absence de tout courant électrique. Compte tenu de la loi locale d'Ohm, ceci impose :



CHAMP DANS UN CONDUCTEUR

Le champ électrostatique intérieur à un conducteur est nul : $\vec{E}_C = \vec{0}$.

et on en déduit immédiatement que le potentiel correspondant est uniforme. En présence de charges en surface, on a vu qu'on peut imposer au potentiel V d'être continu à la traversée de la surface du conducteur, chargée en surface.



POTENTIEL DANS UN CONDUCTEUR

Le potentiel électrostatique à l'intérieur et à la surface d'un conducteur est uniforme : $V_C = \text{cte}$.

Les potentiels des conducteurs seront tous déterminés relativement à la référence $V = 0$ prise à l'infini.

40.1.2 Théorème de Coulomb

Énoncé du théorème

Le champ électrostatique au voisinage immédiat de la surface extérieure (S) d'un conducteur C n'est, lui, pas nul (en tout cas pas nécessairement), puisque la relation de passage permet une discontinuité du champ électrostatique à la traversée de la surface (S) chargée du conducteur. On en déduit immédiatement :

$$\vec{E}_e(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n} \quad (40.1)$$

si \vec{n} est la normale extérieure au conducteur, et $\sigma(P)$ la densité surfacique de charge portée par la surface (S) de C au point P immédiatement voisin de celui où on détermine le champ extérieur $\vec{E}_e(P)$.



THÉORÈME DE COULOMB

Le champ électrostatique au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur chargé est normal à sa surface et sa projection extérieure vaut $\frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}$.

Source du champ local

L'expression du théorème de Coulomb ne doit pas faire penser que le champ $\vec{E}_e(P)$ est uniquement créé par les charges $\sigma(P)dS$ portées par l'élément de surface dS au voisinage duquel on étudie le champ électrostatique.

Ce champ local est la somme du *champ localement créé* par ces charges \vec{E}_l , et du champ créé par *le reste des charges* disposées sur le conducteur et ailleurs dans l'espace, soit \vec{E}_r .

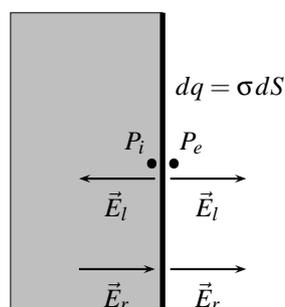


FIG. 40.1 – Sources du champ du théorème de Coulomb

Comme ce reste des charges ne comporte pas de grandeur surfacique au niveau du point étudié, il est continu à la traversée de la surface de séparation dS entre le point P_e (à l'extérieur du conducteur) et le point P_i (à l'intérieur, cf. fig. 40.1).

Par contre, le champ \vec{E}_i est symétrique de part et d'autre des charges qui le créent ; on en déduit, au point P_i intérieur au conducteur :

$$\vec{0} = \vec{E}(P_i) \Rightarrow E_l = E_r$$

et au point extérieur P_e où s'applique le théorème de Coulomb :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} = \vec{E}(P_e) \Rightarrow E_l = E_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

On retiendra que *la moitié* du champ donné par le théorème de Coulomb est créé localement ; on peut encore dire que l'état d'équilibre électrostatique du conducteur correspond à une mise en place des charges de manière à annuler partout localement le champ à l'intérieur du conducteur.

Forces subies par les surfaces d'un conducteur

Compte tenu de la remarque qui précède, on prendra soin de noter que la force exercée sur la charge $dq = \sigma dS$ portée par l'aire dS est due au seul champ extérieur \vec{E}_r ; on écrira donc cette force sous la forme :

$$d\vec{F} = \sigma \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} dS$$

résultat qui est parfois cité sous le nom de *pression électrostatique*, cette dernière étant égale à la densité surfacique de force $\sigma^2/2\epsilon_0$ exercée vers l'*extérieur* de la surface du conducteur C .



PRESSION ÉLECTROSTATIQUE

La densité surfacique des forces électrostatiques exercées sur la surface d'un conducteur chargé vaut

$$p = \frac{\sigma^2(P)}{2\epsilon_0}.$$

40.1.3 Théorème d'unicité

Résolution des problèmes électrostatiques

Les problèmes d'électrostatique des conducteurs s'étudient par résolution de l'*équation de Laplace* dans un domaine \mathcal{D} vide de charges, extérieur aux conducteurs étudiés :

$$\Delta V = 0$$

complété par la donnée de conditions aux limites sur les surfaces (S_i) des conducteurs C_i qui limitent le domaine \mathcal{D} :

$$V(C_i) = V_i$$

Il arrive fréquemment que le domaine \mathcal{D} ne soit pas limité que par les seules surfaces des conducteurs ; toutefois, nous retiendrons que la valeur du potentiel V en tout point de la surface (S) qui limite \mathcal{D} est en général connue.

Si cette surface s'étend jusqu'à l'infini, il ne suffit pas, pour connaître V sur cette surface, d'affirmer qu'il tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment des charges ; cette propriété est en effet complètement générale. On doit de plus préciser un équivalent de V lors de sa décroissance vers zéro.

Théorème d'unicité

Nous affirmerons que :



THÉORÈME D'UNICITÉ

La solution, deux fois dérivable, de l'équation de Laplace est unique pour des conditions aux limites données sur la surface (S) limitant le domaine \mathcal{D} dans lequel on résout cette équation.

On doit comprendre le terme *conditions aux limites données* dans le cadre des précisions posées au paragraphe précédent. On peut justifier ce théorème d'unicité comme suit ; si V et V' sont deux solutions du problème de Laplace $\Delta V = \Delta V' = 0$, c'est-à-dire deux potentiels dans l'espace vide avec les mêmes conditions aux limites $V = V'$ en tout point de (S) , alors la différence $V - V'$ est un potentiel dans le vide avec $V = 0$ sur toute la surface limitant le domaine \mathcal{D} .

Un potentiel sans extremum ($\Delta(V - V') = 0$) dans une région limitée par une surface telle que $V - V' = 0$ ne peut être que nul partout, d'où $V = V'$.

Toutefois, nous retiendrons surtout ce théorème pour son utilité pratique : si on peut proposer une solution d'un problème électrostatique, par exemple par analogie avec un autre problème, cette solution est unique.

40.2 Condensateurs, capacités

40.2.1 Conducteurs en influence

Influence électrostatique

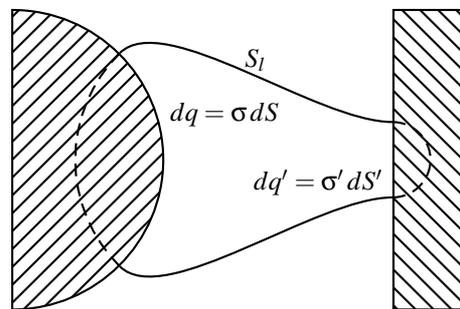


FIG. 40.2 – Influence électrostatique et éléments correspondants

Considérons deux faces de deux conducteurs (ou du même conducteur) disposées face à face dans le vide (cf. fig. 40.2). Un certain réseau de lignes du champ électrique forme un *tube de champ* qui découpe, sur les surfaces extérieures des conducteurs C et C' , les surfaces dS et dS' portant les charges dq et dq' .

La surface latérale S_l du *tube de champ* ainsi délimité est en tout point tangente aux lignes de champ, et le flux du champ électrostatique y est donc nul. Pour lui appliquer le théorème de Gauss, on complète ce tube de champ par des surfaces intérieures aux deux conducteurs, et en tout point desquelles le champ est donc nul. Finalement, on a formé une surface fermée au travers de laquelle le flux total du champ électrostatique est nul ; on en déduit le *théorème des éléments correspondants* :

$$dq + dq' = \sigma dS + \sigma' dS' = 0 \quad (40.2)$$

et les deux surfaces dS et dS' sont dites en *influence électrostatique*.

Plus généralement, l'association de surfaces électrostatiques en influence permet de constituer des surfaces finies en influence électrostatique, dont les charges totales sont deux à deux opposées.

Influence totale et condensateurs

On dit de deux conducteurs qu'ils sont en *influence totale* si toute la surface du conducteur C influence la totalité de la surface du conducteur C' ; ainsi, les charges Q et Q' portées par les deux conducteurs sont opposées :

$$Q + Q' = 0$$

et le système de deux armatures ainsi défini (cf. fig. 40.3) forme un *condensateur*.

Naturellement, l'hypothèse d'influence totale ne peut jamais être vérifiée de façon exacte ; on se contentera en général de *négliger les effets de bord*, ce qui revient à considérer que la charge électrique de la zone d'influence est nettement supérieure (en valeur absolue) à celle qui n'est pas en influence.

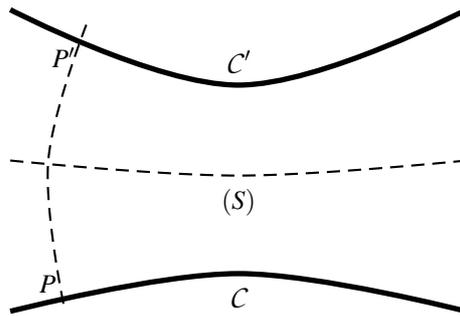


FIG. 40.3 – Réalisation d’un condensateur

Le potentiel de chaque point P de l’armature C du condensateur sera notée V ; de même, le potentiel de chaque point P' de l’armature C' du condensateur sera notée V' et la tension aux bornes du condensateur sera notée $U = V - V'$, tandis qu’on appellera charge du condensateur la grandeur¹ Q .

40.2.2 Capacité d’un condensateur

Définition

Le calcul des tension U et charge Q du condensateur se font par les intégrales :

$$U = \int_P^{P'} \vec{E} \cdot d\vec{r} \text{ et } Q = \int_{(S)} \sigma dS = \epsilon_0 \int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

où la seconde intégrale qui définit Q peut indifféremment être étendue à la surface extérieure de C , ou à toute surface comprise entre C et C' , qui fait de la conservation du flux électrique dans le vide ($\text{div } \vec{E} = 0$).

Si on considère un certain état électrique caractérisé par la répartition des charges électriques σ_1 et le potentiel V_1 , on obtiendra, du fait de la linéarité des équations de Maxwell, un autre état d’équilibre pour la répartition $\sigma_2 = \lambda \sigma_1$ avec pour potentiel $V_2 = \lambda V_1$, et le rapport $\frac{Q}{V}$ sera inchangé.



CAPACITÉ D’UN CONDENSATEUR

On appelle capacité d’un condensateur la grandeur $C = \frac{Q}{U}$ caractéristique de la géométrie des armatures, et indépendante de la tension U sous laquelle on charge le condensateur.

Méthodes de calcul

On retrouve le caractère indépendant de U de la grandeur C en l’écrivant comme le rapport de deux intégrales :

$$C = \epsilon_0 \frac{\int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS}{\int_P^{P'} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

dont le calcul constitue effectif la méthode usuelle de détermination de C . On remarquera aussi l’analogie avec les calculs de conductance électrique, entre deux surfaces de même géométrie que C et C' :

$$G = \frac{I}{U} = \gamma \frac{\int_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{n} dS}{\int_P^{P'} \vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

montrant que les méthodes qui ont pu déterminer les unes (les conductances) donneront les autres (les capacités) avec la relation :

¹Ces conventions, qui consistent à privilégier une des armatures relativement à l’autre, sont bien sûr totalement arbitraires.

$$\frac{G}{\gamma} = \frac{C}{\epsilon_0}$$

On peut encore calculer la capacité d'un condensateur par une méthode énergétique, comme on le montre plus bas. Notons qu'on peut aussi calculer des capacités de condensateurs réalisés dans des matériaux autres que le vide ; on peut alors montrer qu'il suffit souvent de remplacer, dans les expressions ci-dessus, la grandeur universelle ϵ_0 par la grandeur $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ dite *permittivité diélectrique* du milieu isolant qui sépare les armatures, où la *permittivité diélectrique relative* ϵ_r est souvent nettement supérieure à 1.

40.2.3 Énergie électrostatique

Énergie d'un système de conducteurs

On a déjà montré que l'expression générale de l'énergie électrostatique d'un système quelconque de conducteurs peut se mettre indifféremment sous les deux formes :

$$W_e = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 d\tau \quad \text{ou bien} \quad W_e = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \rho V d\tau$$

où la seconde intégrale ne porte que sur le domaine \mathcal{D} porteur de charges, c'est-à-dire en fait sur les surfaces des conducteurs en équilibre :

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\cup_i C_i} \sigma_i V_i dS_i$$

mais dans l'intégrale portant sur la surface de chaque conducteur C_i , V_i est une constante et il vient enfin :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i \geq 0 \quad (40.3)$$

où $W_e = 0$ n'est réalisé que pour la situation où le champ est partout nul, ainsi donc que tous les Q_i et V_i .

Énergie d'un condensateur

Dans le cas d'un condensateur, l'expression ci-dessus est limitée à deux termes et s'écrit :

$$W_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (40.4)$$

où on dispose donc d'un autre moyen de calcul de C si on sait exprimer W_e , par exemple par intégration directe dans tout l'espace.

On se rappellera aussi que cette énergie a été définie comme l'opposé du travail des forces électriques reçues par le système, lors de la constitution quasi-statique de la distribution des charges, prises depuis l'infini.

En particulier, un déplacement des armatures sous l'action des seules forces électrostatiques vérifie :

$$\delta W = -dW_e$$

si W désigne le travail des forces électriques. On en conclut :



INTERPRÉTATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

L'énergie électrostatique W_e d'un condensateur est l'énergie potentielle dont dérivent les forces électrostatiques qui s'exercent sur les armatures d'un condensateur qui reste isolé².

²En particulier, la charge Q doit rester constante. Si ce n'est pas le cas, les armatures sont forcément reliées à un circuit extérieur qui fournit une certaine énergie au condensateur ; cette énergie intervient, au même titre qu'un autre opérateur, dans le bilan énergétique du déplacement.



EDWIN HERBERT HALL (1855–1938)

41.1 Forces de Laplace

41.1.1 Effet Hall

Force de Lorentz

Rappelons une fois encore l'expression, dite de Lorentz¹, compatible avec la dynamique relativiste, de la force exercée sur une charge q , mobile à la vitesse² \vec{u} , en présence d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{B} :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

Nous allons montrer comment l'existence simultanée des deux termes de cette force, dans le cas d'un courant électrique parcourant un conducteur (donc en présence à la fois de charges fixes et mobiles) permet de rendre compte d'une force résultante exercée sur le conducteur lui-même, donc de prévoir la possibilité de *machines électromécaniques*.

Modèle de Drude

Nous considérons dans la suite un modèle microscopique simplifié³ des conducteurs ohmiques, dans lesquels les porteurs de charge électrique mobiles⁴, de charge individuelle q et de masse m , répartis à raison de n porteurs par unité de volume,

¹Les travaux du physicien néerlandais HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853-1928) ont dominé le monde de la physique théorique jusqu'à l'avènement des théories relativiste et quantique. Il est en particulier l'auteur de la théorie des électrons, décrivant la matière comme un ensemble de particules chargées, sources du champ électromagnétique, telle que nous la concevons ici.

²Les trois grandeurs \vec{u} , \vec{E} et \vec{B} doivent être exprimées dans le même référentiel galiléen. Les lois de changement de vitesse, de champ électrique et de champ magnétique compatibles avec cette expression sont de nature relativiste ; on ne s'étonnera donc pas de ne pas retrouver dans cette expression le caractère usuellement invariant des forces en mécanique classique.

³Ce modèle a été développé vers 1900 par l'allemand PAUL KARL LUDWIG DRUDE.

⁴Naturellement, il s'agira souvent d'électrons, mais ce n'est pas une nécessité.

se déplacent dans le milieu conducteur sous l'action par exemple d'un champ électrique selon la loi :

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{u}$$

où \vec{u} est la vitesse des porteurs de charge⁵ et où $-\frac{m}{\tau} \vec{u}$ représente l'effet moyen des interactions des porteurs de charge électrique mobiles avec les porteurs fixes⁶, et des chocs avec les autres porteurs de charge.

La densité volumique de courant $\vec{j} = nq\vec{u}$ s'en déduit, en régime harmonique de pulsation ω , sous la forme :

$$\vec{j} = nq\vec{E} = \gamma(\omega)\vec{E}$$

où on a posé $\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$ et $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$.

On a déjà eu l'occasion de remarquer que l'ordre de grandeur des pulsations de coupure $\frac{1}{\tau}$ est en général très élevé⁷ ce qui permet de considérer que $\gamma \simeq \gamma_0$; c'est bien sûr une relation exacte en régime permanent.

Dans la suite, nous prendrons en compte l'existence éventuelle de forces magnétiques, s'ajoutant aux forces électriques subies par les porteurs de charge mobiles, du fait justement de leur mouvement. La prise en compte de ces forces consiste à ajouter au terme \vec{E} le terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$, d'où la loi d'Ohm modifiée :

$$\vec{j} = \gamma_0 (\vec{E} + \mathcal{R} \vec{j} \wedge \vec{B}) \quad (41.1)$$

où on a choisi de définir la *constante de Hall*⁸ \mathcal{R} par la relation⁹ $\mathcal{R} = 1/nq$.

Champ de Hall

Considérons un barreau cylindrique conducteur d'axe Oz parcouru par un courant électrique I , que nous supposons par exemple uniformément réparti dans le volume du conducteur.

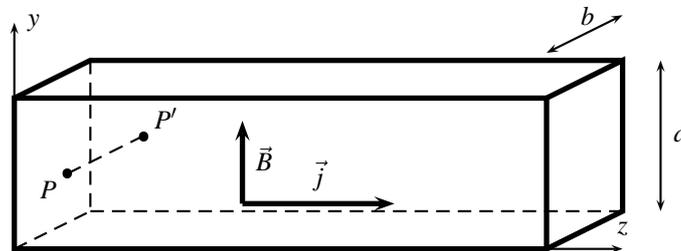


FIG. 41.1 – Effet Hall

Sur le schéma de la figure 41.1, le barreau étudié est un cylindre à base rectangulaire, mais cette forme n'est pas critique. Nous supposons qu'un champ magnétique, orthogonal aux lignes de courant, est superposé au courant électrique ; nous noterons celui-ci $\vec{B} = B\vec{e}_y$.

La présence de ce courant ne peut modifier la direction de \vec{j} par rapport à une situation sans champ magnétique ; en effet, les porteurs de charge ne peuvent quitter le barreau conducteur et on a toujours $\vec{j} = j\vec{e}_z = \frac{I}{ab}\vec{e}_z$. Pour satisfaire à l'équation modifiée de la loi d'Ohm, c'est donc le champ électrique qui doit être modifié ; on l'écrira donc $\vec{E} = E_z\vec{e}_z + E_x\vec{e}_x$, avec $j\vec{e}_z = \gamma_0 (E_z\vec{e}_z + E_x\vec{e}_x - \mathcal{R}jB\vec{e}_x)$.

⁵ On a ici choisi la notation \vec{u} pour éviter toute confusion ultérieure avec la vitesse \vec{v} du déplacement du circuit, tel qu'il est envisagé plus loin.

⁶ Il s'agira par exemple des ions métalliques fixes du réseau cristallin, si le milieu conducteur est un cristal métallique.

⁷ Ceci signifie physiquement que l'intervalle de temps moyen entre deux collisions, qui est de l'ordre de grandeur de τ , est faible dans un milieu conducteur dense.

⁸ La constante de Hall porte le nom du physicien américain EDWIN HERBERT HALL qui découvrit l'effet Hall (cf. plus loin) en 1879

⁹ On remarquera qu'en général la constante de Hall est négative pour les métaux. D'autre part, elle est d'autant plus élevée que le milieu comporte moins de porteurs de charge ; certains des effets précisés ci-après, lorsqu'ils dépendent directement de la constante de Hall, seront bien plus spectaculaires avec les semi-conducteurs qu'avec les conducteurs.

On en conclut que la composante axiale du champ électrique n'est pas modifiée et vérifie toujours $j = \gamma_0 E_z$; par contre, il est apparu une composante transverse du champ électrique, dite *champ de Hall*, et qui vérifie $E_x = \mathcal{R}_j B$ ou, de façon plus générale :

$$\vec{E}_H = -\mathcal{R}_j \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (41.2)$$

L'effet Hall

L'effet Hall (l'apparition du champ de Hall) se traduit par l'apparition de différences de potentiel transversales, entre deux points comme P et P' sur la figure 41.1, pour lesquels on écrira :

$$V_H = V_{P'} - V_P = - \int_P^{P'} \vec{E}_H \cdot d\vec{r}$$

soit, dans le cas qui nous intéresse, $V_H = \mathcal{R} \frac{I}{ab} B b$, ce qui permet donc :

- soit de mesurer le champ magnétique B si la nature du matériau est connue, c'est-à-dire si la constante de Hall \mathcal{R} est au préalable étalonnée pour un matériau donné. Les *sondes à effet Hall* sont ainsi le moyen le plus commode de mesurer le champ magnétique ; l'association de trois sondes orthogonales permet de mesurer les trois composantes de \vec{B} . On utilise pour cela des matériaux semiconducteurs.
- soit de mesurer \mathcal{R} , c'est-à-dire la nature des porteurs de charge dans un matériau donné¹⁰.

Effet Hall et effet de Magnétorésistance

De façon générale, on appellera *champ de Hall* la composante du champ électrique qui est perpendiculaire au mouvement des porteurs de charge ; c'est aussi celle qui disparaît en l'absence de champ magnétique, avec la relation :

$$\vec{E}_H = -\mathcal{R}_j \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \vec{j} = \gamma_0 (\vec{E} - \vec{E}_H)$$

Ce champ électrique peut être considéré comme un effet du déplacement moyen des charges mobiles dans le conducteur ; considérant par exemple le cas de la figure 41.1 et supposant que les porteurs de charge sont des électrons ($q < 0$), ceux-ci se déplacent dans le sens de $-\vec{e}_z$ et subissent donc une force magnétique (ou force de Lorentz) dirigée selon $+\vec{e}_x$.

On observe donc une accumulation de charges négatives sur la face arrière du conducteur (point P' par exemple), et un défaut correspondant qui se traduit par une charge positive de la face avant (point P).

Le champ de Hall est le champ créé par ces charges ; il s'applique aux charges mobiles (et compense, pour leur mouvement, l'effet du champ magnétique) mais aussi aux charges fixes du réseau cristallin du matériau qui constitue le conducteur.

On peut noter que le champ de Hall n'existe pas toujours ; en effet, il est lié à l'existence de limites latérales au volume conducteur, sur lesquelles s'accumulent les charges électriques que le champ magnétique fait dériver. Sur le schéma de la figure 41.1, il s'agit des plans $x = 0$ et $x = b$.

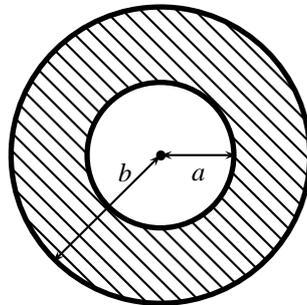


FIG. 41.2 – Géométrie de magnétorésistance

¹⁰C'est à partir de ce type de mesure qu'on a pu constater expérimentalement que, dans certains semiconducteurs, $\mathcal{R} > 0$, ce qu'on interprète en considérant que la conduction électrique est le fait du déplacement de lacunes électroniques dans la structure du matériau. Ces lacunes, qui se comportent comme des charges positives fictives, portent le nom de 'trous' de la structure des semi-conducteurs.

Considérons par contre un conducteur à symétrie cylindrique, comme représenté sur la figure 41.2, soumis à un champ électrique radial. Le milieu conducteur occupe l'espace compris entre les cylindres de rayon a et b . En présence d'un champ magnétique aligné avec l'axe Oz du système cylindrique, l'expression (41.1) de la loi d'Ohm prend, en coordonnées cylindriques, la forme :

$$\begin{bmatrix} j_r \\ j_\theta \end{bmatrix} = \gamma_0 \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma_0 \mathcal{R} B \begin{bmatrix} -j_\theta \\ j_r \end{bmatrix}$$

dont les solutions peuvent s'écrire :

$$j_r = \gamma_0 \frac{E}{1 + \gamma_0^2 \mathcal{R}^2 B^2} \quad j_\theta = \gamma_0 j_r$$

Les courants électriques volumiques tournent donc dans le milieu conducteur, sans qu'aucune limite ne leur soit imposée : on n'observe pas l'apparition d'un champ de Hall. L'effet observé est, pour un champ électrique donné (et donc pour une tension donnée) une diminution du courant volumique radial, donc une diminution du courant qui circule de la couronne $r = a$ vers la couronne $r = b$; tout se passe comme si la résistance électrique augmentait, en valeur relative, de $\gamma_0 \mathcal{R}^2 B^2$; on parle d'effet de *magnétorésistance*.

41.1.2 Forces de Laplace

Expression de la force de Laplace

Considérons un milieu conducteur, globalement neutre, formé de charges électriques fixes¹¹ (densité de charges ρ) et de charges électriques mobiles (densité de charges $-\rho$, vitesse $\vec{u} = -\vec{j}/\rho$). En présence d'un champ électrique total \vec{E}_t (incluant éventuellement un champ de Hall) et d'un champ magnétique \vec{B} , la force totale exercée sur l'élément de volume du milieu conducteur prend la forme :

$$d\vec{F} = \rho d\tau \vec{E}_t - \rho d\tau \vec{E}_t - \rho d\tau \frac{\vec{j}}{-\rho} \wedge \vec{B}$$

soit encore $d\vec{F} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$. Cette force porte le nom de *force de Laplace* exercée sur l'élément de volume $d\tau$.

Interprétation

Les forces de Laplace nous concernent surtout dans le cas de conducteurs filiformes, dans une géométrie que est donc proche de celle de la figure 41.1. Dans ce cas, on a vu que :

$$\vec{E}_H = -\mathcal{R} \vec{j} \wedge \vec{B}$$

La force subie par les porteurs de charge fixe s'écrit alors :

$$d\vec{F} = \rho \vec{E}_t d\tau = \rho \left(\vec{E} + \vec{E}_H \right) d\tau$$

où le second terme s'identifie à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = \rho \vec{E}_H d\tau = nq \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{-nq} d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$



FORCES DE LAPLACE

Les forces de Laplace sont des forces *électriques* exercées par le champ de Hall sur le réseau cristallin du conducteur.

¹¹On fait donc ici l'étude des forces dans le référentiel lié au conducteur.

Notons l'expression de la force de Laplace, selon que le modèle choisi est volumique, surfacique ou filiforme :

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \frac{d\vec{F}}{dS} = \vec{i}_s \wedge \vec{B} \quad d\vec{F} = I d\vec{r} \wedge \vec{B} \quad (41.3)$$

On notera que l'expression de la force de Laplace s'identifie à celle de la partie magnétique de la force de Lorentz exercée sur les porteurs de charge mobiles ; toutefois, il s'agit d'une force totalement différente puisque :

- cette force s'exerce sur le matériau conducteur lui-même ;
- cette force est de nature électrique et non magnétique ; elle est donc susceptible de fournir un travail.

La résultante des forces de Laplace¹² exercées sur un circuit fermé C s'écrit $\vec{F} = I \oint_C d\vec{r} \wedge \vec{B}$ et le moment en un point O de

ces mêmes forces s'écrit $\vec{\Gamma}_O = I \oint_C \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B})$.

Cas d'un champ uniforme

En particulier, le cas très important où le champ magnétique \vec{B} est *uniforme* permet d'écrire $\vec{F} = I \left(\oint_C d\vec{r} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$ tandis

qu'on peut écrire le moment des forces de Laplace¹³ $\vec{\Gamma} = I \left[\oint_C d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} \right]$ soit encore $\vec{\Gamma} = I \oint_C d\vec{r} \wedge (\vec{r} \cdot \vec{B})$

puisque $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = \oint_C d(r^2) = 0$. Finalement, on applique à l'intégrale du définit le moment Γ le théorème du gradient, ce qui permet de l'exprimer en fonction d'une surface quelconque (S) appuyée sur le contour C :

$$\vec{\Gamma} = I \int_{(S)} \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{r} \cdot \vec{B}) dS = \vec{\Gamma} = I \int_{(S)} \vec{n} \wedge \vec{B} dS$$



FORCES DE LAPLACE EXERCÉES EN CHAMP UNIFORME

Le torseur des forces de Laplace exercées sur un circuit filiforme parcouru par le courant I en présence d'un champ magnétique uniforme \vec{B} est un couple, de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, où on a noté \vec{m} le *moment dipolaire magnétique* du circuit C , défini par $\vec{m} = I\vec{S}$, si \vec{S} et le vecteur surface appuyé sur le contour C .

41.2 Flux coupé

41.2.1 Travail des forces de Laplace

Expression du travail

Considérons un élément de circuit filiforme, de longueur $d\vec{r}$, parcouru par le courant I . Cet élément subit, en présence du champ magnétique \vec{B} , la force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{r} \wedge \vec{B}$.

Si cet élément se déplace de $\delta\vec{r} = \vec{v}\delta t$ (cf. fig 41.3), la force de Laplace fournit le travail :

$$d\delta W = I (d\vec{r} \wedge \vec{B}) \cdot \delta\vec{r} = I (\delta\vec{r} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

où on a fait apparaître la *surface coupée* par l'élément de longueur $d\vec{r}$ au cours de son déplacement $\delta\vec{r}$:

$$d\delta\vec{S} = \delta\vec{r} \wedge d\vec{r} \quad (41.4)$$

¹²On utilise souvent à propos des forces de Laplace l'expression incorrecte de *forces magnétiques*.

¹³Dans ce cas, le moment est indépendant du point O où on le calcule puisque la résultante des forces est nulle : le torseur est un couple.

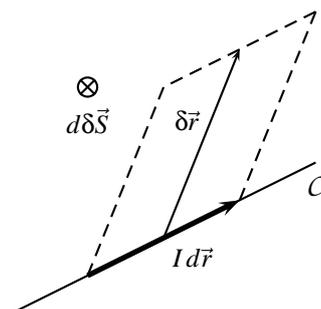


FIG. 41.3 – Travail des forces de Laplace

Flux coupé

Le flux magnétique du champ \vec{B} coupé par l'élément de circuit $d\vec{r}$ au cours de son déplacement $\delta\vec{r}$ vaut, par définition :

$$d\delta\Phi_c = \vec{B} \cdot d\delta\vec{S} \quad (41.5)$$

et le flux coupé correspondant à l'ensemble du circuit C est donnée par $\delta\Phi_c = \oint_C d\delta\Phi_c$. On exprime alors le travail des forces de Laplace en fonction de ce flux coupé.



TRAVAIL DES FORCES DE LAPLACE

Le travail exercé, au cours de la durée δt , par les forces de Laplace exercées en présence du champ magnétique \vec{B} sur le circuit C s'écrit $\delta W = I\delta\Phi_c$.

Définition de l'ampère

Considérons deux fils rectilignes infinis, parallèles, placés dans le vide à la distance x , parcourus par un même courant I . Lorsque cette distance augmente de dx , le flux coupé par une longueur l d'un des fils est égal¹⁴ à $|B(x)l dx|$ où on a montré en première année l'expression du champ créé par un fil à la distance x de celui-ci, soit $B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$.

Écrivant alors le travail de la force de Laplace sous la forme $F dx$, on en déduit que $F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi x}$, ce qui permet d'explicitier la définition de l'unité de base électrique du système international :



L'AMPÈRE

L'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1m l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2\pi 10^{-7}$ N par mètre de longueur.

41.2.2 Flux du champ magnétique

Flux coupé et variation de flux

Considérons un circuit filiforme *fermé* C , mobile, soumis éventuellement à des forces de Laplace, en présence d'un champ magnétique *non nécessairement constant* au cours du temps.

Le flux du champ magnétique \vec{B} peut être calculé aux instants t et $t + \delta t$ par une intégrale du type :

$$\Phi(t) = \int_{(S(t))} \vec{B}(t) \cdot \vec{n} dS \quad \text{et} \quad \Phi(t + \delta t) = \int_{(S(t+\delta t))} \vec{B}(t + \delta t) \cdot \vec{n} dS$$

¹⁴Nous ne précisons ici aucun signe, pas plus que nous n'avons indiqué le sens relatif du courant dans les deux fils.

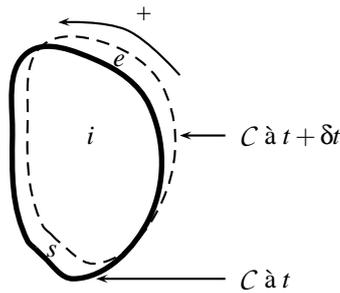


FIG. 41.4 – Variation de flux

où la surface $(S(t))$ est, à l'instant t , appuyée sur le contour C du circuit fermé. On appellera alors *variation de flux* la grandeur $d\Phi = \Phi(t + \delta t) - \Phi(t) = \frac{D\Phi}{Dt} \delta t$.

Dans cette variation de flux, on peut distinguer deux causes, le déplacement du circuit C , qui cause une variation de flux même si \vec{B} est constant et la variation de \vec{B} au cours du temps, qui cause une variation de flux même si C est immobile.

Pour déterminer la variation *totale* (due à ces deux causes) du flux magnétique, on peut (cf. figure 41.4) expliciter le flux à l'instant t , $\Phi(t) = \Phi_i(t) + \Phi_s$ en sommant les champs dans la zone intérieure i et dans la zone de sortie s .

De même, on écrit $\Phi(t + \delta t) = \Phi_i(t + \delta t) + \Phi_e$ en prenant en compte la zone d'entrée e .

La différence $\Phi_i(t + \delta t) - \Phi_i(t)$, lorsque $dt \rightarrow 0$, est la *variation locale* du flux magnétique, qui s'écrit sous la forme

$$\Phi_i(t + \delta t) - \Phi_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t \text{ où } \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS.$$

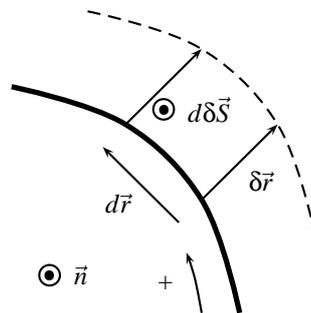


FIG. 41.5 – Flux coupé par un circuit fermé

Pour déterminer l'autre partie $\Phi_s - \Phi_e$ de la variation du flux magnétique, examinons la géométrie du flux coupé par le déplacement du circuit dans la zone marquée e , comme sur le schéma de la figure 41.5.

On voit que la surface coupée $d\delta\vec{S}$ dans cette zone de sortie est exactement égale à l'élément de surface $\vec{n}dS$ orienté par la règle de Maxwell ; on en déduit que le flux à travers cette zone e est le flux total coupé par l'avancée du circuit C vers cette zone d'entrée e , $\Phi_e = +\delta\Phi_{C_e}$.

Dans la zone s où le flux sort de C , on écrirait de la même façon $\Phi_s = -\delta\Phi_{C_s}$ puisqu'il y a ici changement d'orientation relative du déplacement $d\vec{r}$ le long du contour orienté et du déplacement $\delta\vec{r}$ du circuit.

Finalement, en l'absence de flux coupé ailleurs que dans les zones e et s , on a $\Phi_e - \Phi_s = \delta\Phi_C$.



VARIATION DE FLUX ET FLUX COUPÉ

La variation totale du flux magnétique à travers un circuit fermé est la somme de la dérivée locale de ce flux, et du flux coupé par ce circuit par unité de temps :

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\delta\Phi_C}{\delta t}$$

On notera l'analogie de cette relation avec les variations totales de grandeurs extensives, telles qu'elles sont été définies dans le cours de Thermodynamique : la variation totale (particulaire) d'une grandeur extensive est la somme de la variation locale (sur place) et du débit cette grandeur extensive, sortant de la surface de contrôle fixe qui limite le système étudié. Dans le cas d'un champ *magnétostatique*, on peut donc confondre les *variations du flux du champ magnétique* et le *flux coupé* par le déplacement du circuit, ce qui permet un calcul aisé des forces de Laplace, *via* leur travail.

Théorème de Maxwell

Considérons le cas particulier d'un circuit à courant I *indépendant du temps*, se déplaçant dans une zone où le champ magnétique est *constant*. Le travail des forces de Laplace peut alors s'écrire $\delta W = I\delta\Phi_c = Id\Phi$ puisque la variation locale du flux est nulle. Enfin, puisque I est constant, on en déduit l'expression :

$$\delta W = -d(I\Phi)$$

Le travail des forces magnétostatiques est donc l'opposé de la variation d'une grandeur caractéristique de la position du circuit étudié ; on reconnaît une propriété qui définit l'énergie potentielle d'un système, ce qui permet donc d'écrire :



THÉORÈME DE MAXWELL

L'énergie potentielle dont dérivent les forces de Laplace subies par un circuit fermé parcouru par un courant constant en présence d'un champ magnétique constant s'écrit :

$$E_p = -I\Phi$$

Bien que les conditions d'application en soient très restrictives, le théorème de Maxwell peut fournir une méthode de calcul du torseur des forces magnétiques, par l'intermédiaire de son travail lors d'un déplacement virtuel.

42

Magnétostatique



JEAN-BAPTISTE BIOT (1774–1862)

42.1 Lois de base de la magnétostatique

42.1.1 Les lois de Biot et Savart

Les lois de l'électromagnétisme

Rappelons encore une fois l'expression des équations de Maxwell $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$, $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, la condition de jauge $\text{div } \vec{A} = 0$ et les équations de Poisson dans le cas des régimes permanents, $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ et $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$. Ces équations montrent le découplage des équations électriques et magnétiques ; dans la suite, nous étudierons les champs magnétiques \vec{B} et les potentiels vecteurs \vec{A} créés par des distributions constantes de courant volumiques \vec{j} , mais aussi par des distributions surfaciques ou filiformes.

Courants électriques

Le courant électrique est la mesure de la quantité de charge traversant une section orientée par unité de temps. C'est une grandeur scalaire algébrique dont le signe dépend de l'orientation de cette section.

Dans le cas le plus simple, les distributions de courant sont volumiques et le courant traversant une surface (S) orientée est donné par :

$$I_{(S)} = \int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS$$

où la densité volumique \vec{j} s'exprime donc en $A \cdot m^{-2}$. Toutefois, on utilise aussi des notations surfaciques pour les nappes de courants de faible épaisseur ; rappelons alors que le courant traversant une courbe (C) tracée sur la nappe de courants (Σ) est donnée par :

$$I_{(C)} = \int_{(C)} \vec{i}_s \cdot \vec{n} dl$$

où le vecteur \vec{n} est le vecteur contenu dans (Σ) , orthogonal à (C) , orienté dans le sens où on veut mesurer le courant $I_{(C)}$. Ainsi, la densité surfacique de courant \vec{i}_s se mesure en $A \cdot m^{-1}$.

Dans le cas des nappes de courant réalisées par adjonction de nombreux fils jointifs, la norme de i_s s'identifie avec le produit du nombre n de fils par unité de longueur, par le courant I transporté par un de ces fils.

Forces magnétiques

On a déjà noté l'expression commune de la *force de Lorentz* exercée par un champ magnétique sur les particules chargées en mouvement, et de la *force de Laplace* exercée en présence d'un champ magnétique sur un conducteur, sous la forme $d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$, $d\vec{F} = \vec{i}_s \wedge \vec{B} dS$ ou $d\vec{F} = Id\vec{r} \wedge \vec{B}$ selon la modélisation utilisée. Dans la suite, nous noterons donc :

$$d\vec{F} = d\vec{k} \wedge \vec{B}$$

en fonction de l'*élément de courant* adapté à la modélisation choisie, noté $d\vec{k}$, et qui s'exprime en $A \cdot m$.

Le potentiel vecteur

La détermination du potentiel vecteur \vec{A} passa par la résolution de l'équation de Poisson magnétostatique $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ dont la solution peut être précisée par analogie avec l'étude des problèmes électrostatiques déjà présentés¹, ou encore par simplification aux équations des potentiels retardés dans le cas du régime permanent.

Nous écrivons donc simplement :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau(P) \quad (42.1)$$

dans le cas de la distribution volumique de courants étendue au domaine \mathcal{D} , ou encore :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{d\vec{k}(P)}{PM}$$

dans le cas général². On notera aussi que cette expression vérifie par construction la jauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$.

Le champ magnétostatique

L'expression du potentiel vecteur magnétostatique permet d'accéder au calcul du champ magnétostatique sous la forme $\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \text{rot}_M \frac{d\vec{k}(P)}{PM}$, sous réserve de vérifier les conditions d'application du théorème de dérivation

sous le signe somme pour les intégrales dépendant d'un paramètre. On calcule alors ce rotationnel au moyen de la relation générale $\text{rot} (f\vec{W}) = f\text{rot } \vec{W} + (\text{grad } f) \wedge \vec{W}$ soit ici, puisque $d\vec{k}(P)$ ne dépend pas de M , et comme on a déjà vu que $\text{grad}_M \frac{1}{PM} = -\frac{\vec{PM}}{PM^3}$, il vient :

¹ Il suffit en effet de projeter l'équation de Poisson magnétostatique sur un axe cartésien pour obtenir $\Delta A_x = -\mu_0 j_x$ qui est formellement analogue à l'équation de Poisson électrostatique $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ à condition de remplacer ρ par la composante adaptée j_x de \vec{j} , et $\frac{1}{\epsilon_0}$ par μ_0 .

² Comme dans le cas électrostatique, cette expression suppose implicitement que le potentiel vecteur s'annule à l'infini. Cette expression peut donc ne pas être adaptée à certains exercices excessivement simplifiés, c'est-à-dire que l'intégrale ci-dessus ne converge pas forcément lorsque la distribution \mathcal{D} s'étend jusqu'à l'infini. Si c'est le cas, on devra procéder au calcul direct du champ magnétique selon une des méthodes présentées plus bas.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P) \quad (42.2)$$

qui constitue la *loi de Biot et Savart*³ dans le cas volumique, qu'on peut encore écrire sous une forme indépendante de la modélisation choisie :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in \mathcal{D}} \frac{d\vec{\kappa}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Symétries positives des courants

Considérons une certaine distribution de courants \mathcal{D} , invariante par une symétrie π relativement à un certain plan Π_+ , ce qui signifie que les éléments de courant $d\vec{\kappa}(P)$ et $d\vec{\kappa}(P')$ disposés en deux points P et $P' = \pi(P)$ symétriques relativement à Π_+ sont également symétriques : $d\vec{\kappa}(P') = \pi[d\vec{\kappa}(P)]$.

On peut calculer les champs magnétostatiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$ en deux points symétriques par rapport à Π_+ par des intégrales analogues ; en effet, les termes $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\kappa}(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3}$ et $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\kappa}(P') \overrightarrow{P'M'}}{P'M'^3}$ sont antisymétriques par rapport à Π_+ . Pour s'en

convaincre, on peut traiter Π_+ comme plan Oxy et donc écrire $d\vec{\kappa}(P) = \begin{bmatrix} d\kappa_x \\ d\kappa_y \\ d\kappa_z \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{PM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ soit encore $d\vec{\kappa}(P') = \begin{bmatrix} d\kappa_x \\ d\kappa_y \\ -d\kappa_z \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{P'M'} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$ d'où enfin $d\vec{\kappa}(P) \wedge \overrightarrow{PM} = \begin{bmatrix} zd\kappa_y - yd\kappa_z \\ xd\kappa_z - zd\kappa_x \\ yd\kappa_x - xd\kappa_y \end{bmatrix}$ et $d\vec{\kappa}(P') \wedge \overrightarrow{P'M'} = \begin{bmatrix} -zd\kappa_y + yd\kappa_z \\ -xd\kappa_z + zd\kappa_x \\ yd\kappa_x - xd\kappa_y \end{bmatrix}$ avec comme annoncé une relation d'antisymétrie :

$$d\vec{\kappa}(P') \wedge \overrightarrow{P'M'} = -\pi [d\vec{\kappa}(P) \wedge \overrightarrow{PM}]$$

SYMÉTRIES POSITIVES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

Les champs magnétostatiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie des courants Π_+ , sont eux-mêmes antisymétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{B}(\pi(M)) = -\pi(\vec{B}(M))$$

Un cas particulier important est celui d'un point M situé sur le plan de symétrie lui-même ; ce point est confondu avec l'opposé de son symétrique :

$$\vec{B}(M) = -\pi(\vec{B}(M))$$

ce qui n'est possible que si ce vecteur $\vec{B}(M)$ est lui-même orthogonal au plan Π_+ :

SYMÉTRIES POSITIVES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

En un point $M \in \Pi_+$ d'un plan Π_+ de symétrie des charges, le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan :

$$M \in \Pi_+ \Rightarrow \vec{B}(M) \perp \Pi_+$$

On notera bien sûr que ces propriétés de symétrie sont en quelque sorte *orthogonales* à celles vues pour le champ électrostatique⁴. On retient parfois cette différence en notant que :

- Le champ électrostatique est un *vecteur polaire*, de même que tous les vecteurs qui ont les symétries des sources, et ne dépendent pas du choix d'orientation directe ou indirecte de la base d'étude (c'est aussi le cas de \vec{j} et \vec{A}).
- Le champ magnétostatique est un *vecteur axial*, qui a une symétrie opposée à celle de ses sources, se détermine⁵ et

³Dans la plupart des pays, cette loi est connue sous le nom de *loi de Laplace*. En France, la loi rappelle le nom des physiciens JEAN-BAPTISTE BIOT (1774-1862), qui travailla dans divers domaines de la Physique : Astronomie, Thermodynamique, Électromagnétisme, et FÉLIX SAVART (1791-1841), qui travailla sous la direction de Biot dans le domaine de l'acoustique.

⁴Ceci ne signifie pas bien sûr que ces deux champs sont systématiquement orthogonaux. En particulier, les plans de symétrie des charges ne sont pas nécessairement identiques aux plans de symétrie des courants, pour un problème électromagnétique donné.

⁵Ce champ s'exprime selon la loi de Biot et Savart.

s'exprime⁶ par un produit vectoriel ; ce vecteur dépend donc du choix d'orientation directe de la base d'étude. Notons qu'un choix indirect change deux sens consécutifs, et ne modifie en fin de compte pas la relation entre les sources du champ et les forces exercées sur les particules d'épreuve.

On retiendra l'importance du choix d'une *base orthonormée directe* pour déterminer le champ magnétostatique et utiliser la loi de Biot et Savart.

Symétries négatives des courants

Considérons maintenant une certaine distribution de courant \mathcal{D} , invariante par la composition d'une symétrie π relativement à un certain plan d'antisymétrie (ou *plan de symétrie négative*) Π_- , et de l'opération de conjugaison de charge qui change tous les courants en leurs opposés.

Comme dans le cas électrostatique, on montre immédiatement que :



SYMÉTRIES NÉGATIVES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

Les champs magnétostatiques $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(\pi(M))$ en deux points M et $\pi(M)$ symétriques relativement à un plan de symétrie négative des courants Π_- , sont eux-mêmes symétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{B}(\pi(M)) = \pi(\vec{B}(M))$$

Un cas particulier important est celui d'un point M situé sur le plan de symétrie lui-même ; ce point est égal à son symétrique, ce qui n'est possible que si ce vecteur $\vec{B}(M)$ est lui-même contenu dans le plan Π_- :



SYMÉTRIES NÉGATIVES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

En un point $M \in \Pi_-$ d'un plan Π_- d'antisymétrie (ou de symétrie négative) des courants, le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan :

$$M \in \Pi_- \Rightarrow \vec{B}(M) \in \Pi_-$$

Invariances du champ

Considérons enfin une opération affine quelconque (translation, rotation) qui laisse invariante la distribution \mathcal{D} ; le passage du point M à son image M' par cette opération affine s'accompagne de la même opération pour les forces magnétiques, donc, à un changement de signe près, pour les diverses composantes du champ \vec{B} .

Nous nous servirons en général de cette propriété sous une forme restreinte, mettant à profit le caractère isométrique des transformations citées :



INVARIANCES DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

Si une distribution de courants électriques est invariante par une certaine isométrie affine, la norme du champ magnétostatique est invariante par la même isométrie.

L'utilisation successive des propriétés de symétrie, puis d'invariance, permet souvent de simplifier un problème magnétostatique et de déterminer le champ à partir d'une propriété globale : le théorème d'Ampère.

42.1.2 Le théorème d'Ampère

Énoncé du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'exprime, en régime statique, sous une forme simplifiée par rapport au cas général, du fait de la disparition du courant de déplacement :



THÉORÈME D'AMPÈRE

Sur toute contour fermé orienté (C) , la circulation du champ \vec{B} le long de (C) est égale au courant $I_{(S)}$ passant à travers toute appuyée sur (C) et orientée par (C) , multiplié par μ_0 :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{(S)}$$

⁶Ce champ s'exprime par ses conséquences mécaniques, les lois de force de Lorentz et Laplace.

On remarquera que le choix de la surface (S) appuyée sur (C) est indifférent ; ce résultat est connu sous le nom de *conservation du flux magnétique*.

Il reste naturellement possible d'utiliser le théorème d'Ampère, soit sous sa forme locale $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, soit sous la forme équivalente de l'équation de Poisson $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.

AEQS

Les résultats établis dans ce chapitre resteront valables en régime variable, à la condition qu'on puisse négliger le courant de déplacement devant les autres termes de l'équation de Maxwell-Ampère.

On a déjà montré que ce courant de déplacement est toujours négligeable à l'intérieur des conducteurs devant le courant de conduction ; il reste à préciser à quelle condition cette approximation (dite *approximation des états quasi-stationnaires* ou AEQS) reste raisonnable dans le vide qui entoure les conducteurs, porteurs des courants sources de \vec{B} . Pour cela, nous traiterons, dans le vide, les équations de Maxwell en termes d'ordres de grandeur, ce qui mène à :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{E}{L} \sim \frac{B}{T}$$

si L et T désignent respectivement les dimensions caractéristiques des variations spatiale et temporelle des champs. De même, on obtient la condition d'AEQS en écrivant :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{E}{c^2 T} \sim \frac{BL}{c^2 T^2}$$

et ce terme sera négligeable devant $\text{rot} \vec{B} \sim \frac{B}{L}$ seulement si $\frac{L}{T} \ll c$ ou, ce qui revient au même, si on peut négliger les phénomènes de propagation :



CONDITION D'AEQS

La détermination des champs magnétiques en régime variable peut se faire dans le cadre de l'AEQS (expressions magnétostatiques) si les dimensions caractéristiques L du système étudié et les durées caractéristiques T de variation des grandeurs électriques et magnétiques vérifient :

$$\frac{L}{T} \ll c$$

Ainsi, pour un circuit électrique ordinaire ($L \sim 1$ m), on devra imposer $\frac{1}{T} \ll 300$ MHz ; ou encore, pour le courant industriel, $\frac{1}{T} = 50$ Hz et on devra imposer $L \ll 6000$ km.

Ces conditions, somme toute peu restrictives, seront souvent vérifiées ; si elles ne le sont pas, on se trouve devant l'étude d'un problème de *propagation électromagnétique* des champs couplés \vec{E} et \vec{B} . Par contre, dans le cadre de l'AEQS, le calcul de \vec{B} peut être traité de manière autonome ; on verra au chapitre prochain comment l'effet des variations de \vec{B} impose de prendre en compte un couplage partiel entre \vec{B} et \vec{E} , qui porte le nom d'*induction électromagnétique*.

Relations de passage

On peut aussi utiliser les relations de passage, qui gardent un régime statique la même forme qu'en régime variable ; si la surface de séparation de deux milieux (1) et (2) porte le courant surfacique \vec{i}_s , la discontinuité finie du champ magnétostatique est donnée par :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Le champ \vec{B} étant continu par morceaux, on continuera à chercher pour le potentiel \vec{A} une solution fonction continue de l'espace.

42.2 Dipôles magnétostatiques

42.2.1 Dipôle magnétique actif

Distribution dipolaire magnétique

Tous les circuits électriques sont *fermés*, ce qui impose au champ magnétostatique créé par toute distribution une structure dipolaire à grande distance de la source (le terme monopolaire est nul, ce qui correspond aussi au fait qu'il n'existe pas de charge magnétique dans les équations de Maxwell).

Nous n'aurons donc aucune raison de restreindre la définition des structures dipolaires magnétiques par une condition analogue à $Q = 0$ imposé dans le cas du dipôle électrostatique.

Nous avons aussi déjà eu l'occasion de définir un moment dipolaire magnétique ; une distribution dipolaire magnétique est donc simplement une distribution à moment dipolaire magnétique non nul (cf. ci-après).

Moment dipolaire magnétique

Le moment dipolaire magnétique d'un circuit filiforme fermé parcouru par un courant I a été défini par la relation $\vec{m} = I\vec{S}$ si \vec{S} et le vecteur surface appuyé sur le contour (C) :

$$\vec{m} = I\vec{S} = \int_{(S)} I\vec{n} dS \quad (42.3)$$

Remarquons encore qu'on peut choisir pour surface (S) appuyée sur le contour fermé (C) un cône de sommet O extérieur à (S), pour lequel on montre immédiatement que $\vec{n} dS = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{r}$, d'où l'expression :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_{(C)} \vec{r} \wedge I d\vec{r}$$

ou encore, sous une forme générale, indépendante de la modélisation des courants :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \vec{r} \wedge d\vec{k} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \vec{r} \wedge \vec{j} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \vec{r} \wedge \vec{i}_s dS$$

Le potentiel vecteur dipolaire

Considérons à nouveau la modélisation filiforme des courants ; nous cherchons une expression du potentiel vecteur magnétique à partir de $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in (C)} \frac{d\vec{r}}{PM}$ à développer au premier ordre non nul si la distance PM est toujours grande devant

les dimensions de (C). Nous utiliserons pour cela le théorème de Kelvin sous la forme $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in (S)} \vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM} dS$

où l'expression exacte $\overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ doit seulement être développée ici à l'ordre zéro (puisqu'il s'agit d'une dérivée première du terme qu'on souhaitait développer à l'ordre un) ; il vient donc $\overrightarrow{\text{grad}}_P \frac{1}{PM} \simeq \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ et le potentiel vecteur

magnétique devient $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P \in (S)} \vec{n} dS \wedge \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ ou encore :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 \vec{m} \wedge \overrightarrow{OM}}{4\pi OM^3} \quad (42.4)$$

pour un dipôle magnétique \vec{m} disposé au point O . Notons aussi l'expression obtenue en coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe ($0, \vec{m}$) :

$$\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0 \vec{m} \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{e}_\varphi$$

Le champ dipolaire

Le calcul direct du rotationnel de l'expression ci-dessus se mène aisément en coordonnées sphériques ; on obtient :

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] \quad (42.5)$$

qui est bien sûr formellement analogue à l'expression du moment dipolaire électrique, à condition de faire les substitutions $p \rightarrow m$ et $\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$; on peut donc aussi utiliser l'expression intrinsèque du même champ, qui prend la forme (indépendante de tout système de coordonnées) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2]$$

Enfin, les lignes de champ du champ dipolaire magnétique ont la même structure que celles du champ dipolaire électrique (à grande distance du dipôle) puisque les deux expressions sont identiques ; la forme des lignes de champ correspondantes est rappelée sur la figure 42.1.

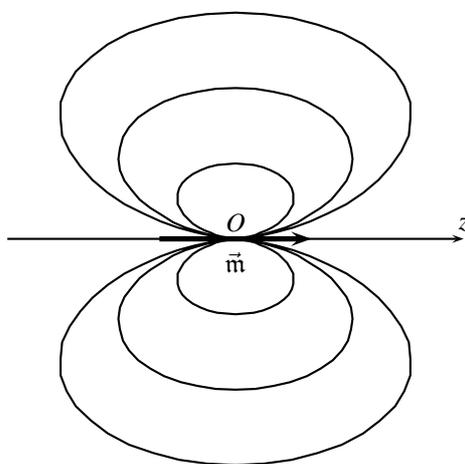


FIG. 42.1 – Lignes de champ du champ dipolaire

42.2.2 Dipôle magnétique passif

Torseur des efforts subis

Un dipôle magnétique passif est un circuit dont les dimensions sont réduites devant la dimension caractéristique de variation spatiale du champ magnétique extérieur qui agit sur ce dipôle ; ce cas a déjà été traité au chapitre précédent, où on a montré :



DIPÔLE MAGNÉTIQUE PASSIF

Le torseur des forces de Laplace subies par un dipôle magnétique passif sous l'action d'un champ magnétostatique extérieur \vec{B}_0 est un couple, de résultante nulle et de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

On notera bien sûr que l'analogie est complète avec le cas du dipôle électrostatique passif.

Énergie potentielle d'interaction

Considérons un dipôle magnétique dont le courant électrique I est constant, subissant les actions extérieures (forces de Laplace) causées par un champ magnétostatique \vec{B}_0 .

Il s'agit d'un circuit placé dans les conditions d'application du théorème de Maxwell, donc pour lequel l'énergie potentielle d'interaction avec l'extérieur s'écrit :

$$E_p = -I\Phi = -I \int_{(S)} \vec{B}_0 \cdot \vec{n} dS$$

qui s'écrit donc encore sous une forme analogue à celle déjà trouvée pour le dipôle électrique passif⁷ :



DIPÔLE MAGNÉTIQUE PASSIF

L'énergie potentielle d'interaction entre une distribution dipolaire de courants de moment \vec{m} avec un champ magnétique extérieur \vec{B}_0 a comme expression :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

On retrouve l'interprétation déjà établie dans le cas électrostatique : l'interaction du champ extérieur et de la distribution dipolaire a pour effet d'aligner le vecteur \vec{m} et le vecteur \vec{B}_0 ; lorsque cet alignement est réalisé, un état d'équilibre stable (minimum d'énergie potentielle) est réalisé.

⁷Ce résultat était prévisible : le même torseur correspond à la même énergie potentielle d'interaction, si les conditions de cette interaction sont les mêmes.

43

Induction électromagnétique



MICHAEL FARADAY (1791–1867)

43.1 Lois de l'induction

43.1.1 Phénomènes d'induction

Le cadre de l'étude

Nous nous placerons, dans tout ce qui suit, dans le cadre de l'approximation des états quasi-stationnaires : le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sera déterminé en tout point \vec{r} et à tout instant t par application des lois de la magnétostatique, ce qui suppose *a priori* qu'on n'étudie que des champs à variation suffisamment lente.

Nous montrerons comment les variations apparentes du champ magnétique subi par un conducteur électrique se traduisent par des phénomènes de nature électrique, les tensions ou courants induits. Les causes de ces phénomènes peuvent être :

- soit une variation du champ magnétique lui-même, sous la forme d'une loi $\vec{B}(t)$; on parlera de *phénomènes d'induction de Neumann* ;
- soit un déplacement du circuit électrique dans une zone où le champ magnétique est invariable ; on parlera de *phénomènes d'induction de Lorentz* ;
- soit les deux à la fois.

Courant et différence de potentiel

En présence d'un champ variable, l'expression reliant le champ électrique aux potentiels s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ce qui montre qu'on ne peut plus, en présence d'un champ magnétique variable, évaluer simplement la différence de potentiel à la circulation du champ électrique.

Notons toutefois que le champ électrique \vec{E} ci-dessus est *a priori* exprimé dans un référentiel (R) fixe, relativement auquel le circuit étudié est éventuellement mobile.

Dans le référentiel mobile (R') lié au conducteur, le champ électrique sera noté \vec{E}' ; c'est ce champ qui est directement ressenti par les charges mobiles du conducteur. Pas plus que \vec{E} , \vec{E}' n'est pas égal à $-\text{grad}V$.

Dans un circuit fermé constitué de milieux ohmiques, le courant électrique est relié au champ électrique par la relation constitutive $\vec{j} = \gamma \vec{E}'$; si on considère un circuit AB de longueur d et de section S constante, la loi d'Ohm prend alors la forme intégrale :

$$Id = \int_A^B S \vec{j} \cdot d\vec{r} = \gamma S \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{r}$$

ou encore, en introduisant la résistance électrique $R = \frac{d}{\gamma S}$ du circuit :

$$\frac{I}{R} = \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{r}$$

Ainsi, le courant électrique reste bien proportionnel à la circulation du champ électrique \vec{E}' ressenti dans le référentiel du conducteur mobile.

43.1.2 Champ électromoteur

Définition

On appelle *champ électromoteur* la partie du champ électrique \vec{E}' qui n'est pas égale à $-\overrightarrow{\text{grad}}V$:

$$\vec{E}' = \vec{E}_m - \overrightarrow{\text{grad}}V \quad (43.1)$$

ce qui permet d'écrire la loi d'Ohm dans une portion de conducteur ohmique telle que celle décrite plus haut sous la forme :

$$\frac{I}{R} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{r} + V(A) - V(B)$$

où on remarquera que le courant I est par hypothèse compté positivement s'il passe de A vers B .

Force électromotrice

La relation ci-dessus peut encore être écrite sous la forme d'une modélisation électrocinétique de Thévenin :

$$V(B) - V(A) = U = e_m - RI$$

où la remontée de tension le long du circuit AB contient un terme ohmique 'ordinaire' $-RI$ et un terme supplémentaire, dit de *force électromotrice* induite¹ par les variations de \vec{A} ou le déplacement du circuit :

$$e_m = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{r} \quad (43.2)$$

¹On peut bien sûr aussi rencontrer des forces électromotrices d'origine différente de celle considérée ici (les phénomènes d'induction) ; toutefois, ces forces électromotrices ne prennent pas naissance dans des milieux ohmiques. Ici, il suffit qu'un milieu conducteur soit mis en mouvement ou soumis à un champ magnétique variable.

Expression du champ électromoteur

On a eu l'occasion d'affirmer la relation, d'origine relativiste, qui relie les champs électriques \vec{E} et \vec{E}' dans deux référentiels différents, sous la forme :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

où \vec{V} est la vitesse relative du référentiel (R') par rapport au référentiel (R), c'est-à-dire la *vitesse du conducteur* relativement au référentiel galiléen dans lequel on exprime les champs \vec{B} et \vec{E} .

Il est d'ailleurs possible de donner une justification qualitative à cette relation dans le cadre classique ; si on note \vec{u} la vitesse des porteurs de charge (électrons, dans le cas d'un conducteur métallique) relativement au conducteur mobile, leur vitesse relativement au référentiel (R) est $\vec{u} + \vec{V}$ et la force de Lorentz exercée sur ces électrons s'écrit :

$$\vec{F} = -e \left(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{u} \wedge \vec{B} \right)$$

et tout se passe donc comme si le conducteur était fixe, à condition de remplacer \vec{E} par $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$. Ainsi, le champ électromoteur est donné par la relation générale :

$$\vec{E}_m = \underbrace{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{\vec{V} \wedge \vec{B}}_{\text{Lorentz}} \quad (43.3)$$

où le premier terme est le champ électromoteur de Neumann, qui décrit les effets d'induction en présence d'un champ magnétique variable, et le second est le champ électromoteur de Lorentz, qui décrit les effets d'induction dus au déplacement du circuit. Ces termes permettent de déterminer la tension observée aux bornes du conducteur si le circuit est ouvert (cette tension est alors égale à e_m) ou le courant induit dans le circuit s'il est fermé (ce courant est alors égal à $i = e_m/R$).

43.1.3 Lois de Lenz-Faraday

Induction de Neumann

Considérons une situation d'induction de Neumann seulement (champ magnétique variable devant un circuit fixe) le long d'un circuit électrique *fermé* (C).

On peut écrire la forme électromotrice induite le long de ce circuit sous la forme :

$$e_m = \oint_{(C)} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r}$$

où on remarque que, pour toute surface (S) appliquée sur le contour (C), le flux du champ magnétique vaut :

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ce qui permet d'écrire encore :

$$e_m = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_{(S)} \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad (43.4)$$

où la notation en dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$ rappelle qu'on étudie ici une variation de flux à circuit fixe, due aux seules variations de $\vec{B}(t)$.

²On notera aussi que, au même ordre d'approximation, les champs magnétiques \vec{B} et \vec{B}' dans (R) et (R') sont identiques.

Induction de Lorentz

Considérons maintenant une situation d'induction de Lorentz seulement (champ magnétique invariable appliqué à un circuit mobile) le long d'un circuit électrique (non nécessairement fermé) (C).

On peut maintenant écrire la forme électromotrice induite le long de ce circuit sous la forme :

$$e_m = \int_{(C)} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} = - \int_{(C)} (\vec{v} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

ce qu'on peut encore écrire en faisant apparaître le déplacement $\delta\vec{r} = \vec{v}\delta t$ d'un élément du circuit (C) sous la forme :

$$e_m \delta t = - \int_{(C)} (\delta\vec{r} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

où on reconnaît le flux coupé par le circuit (C) lors de son déplacement :

$$e_m = - \frac{\delta\Phi_c}{\delta t} \quad \delta\Phi_c = \int_{(C)} \vec{B}(t) \cdot d\delta S_c \quad (43.5)$$

Cas général

En présence des deux phénomènes d'induction simultanément, on doit ajouter les deux causes de variation du flux magnétique : champ variable *et* circuit mobile ; on a déjà montré que la somme de la variation locale du flux et du flux coupé représente la variation totale du flux du champ magnétique.



LOI DE LENZ-FARADAY

La force électromotrice induite le long d'un circuit fermé quelconque s'écrit :

$$e_m = - \frac{D\Phi}{Dt} = \underbrace{- \frac{\partial\Phi}{\partial t}}_{\text{Neumann}} + \underbrace{- \frac{\delta\Phi_c}{\delta t}}_{\text{Lorentz}}$$

Nous allons dans la suite développer des méthodes de calcul du flux magnétique, dans le but de calculer la force électromotrice induite par ses variations.

43.2 Calcul de flux magnétique

43.2.1 Coefficients d'inductance

Le système étudié

Étudions un système de N circuits électriques C_k , chacun d'eux étant parcouru par le courant électrique I_k . Ces courants sont la source d'un champ magnétostatique \vec{B} , qui dérive du potentiel vecteur \vec{A} ; nous cherchons ici à calculer le flux Φ_k du champ magnétostatique \vec{B} à travers l'un des circuits C_k :

$$\Phi_k = \int_{P_k \in (S_k)} \vec{B}(P_k) \cdot \vec{n} dS_k$$

où l'intégrale porte sur une surface quelconque (S_k) appuyée sur le contour du circuit C_k .

On peut aussi calculer le même flux par la relation :

$$\Phi_k = \oint_{P_k \in (C_k)} \vec{A}(P_k) \cdot d\vec{M}_k$$

où on a noté $d\vec{P}_k$ le déplacement $d\vec{OP}_k$ le long du contour C_k .

Flux du champ magnétique

Le potentiel vecteur \vec{A} est créé par les différents circuits C_p et peut, compte tenu des résultats généraux du cours de magnétostatique, s'écrire sous la forme :

$$\vec{A}(P_k) = \sum_{p=1}^N \vec{A}_p(P_k)$$

où le potentiel vecteur $\vec{A}_p(P_k)$ est celui créé en P_k par le p -ième circuit, sous la forme :

$$\vec{A}_p(P_k) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P_p \in C_p} I_p \frac{d\vec{P}_p}{P_p P_k}$$

ce qui permet encore d'écrire $\Phi_k = \sum_{p=1}^N \Phi_{p \rightarrow k}$, où le flux du champ magnétique créé par le circuit p à travers le circuit k a pour expression :

$$\Phi_{p \rightarrow k} = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \int_{\substack{P_p \in C_p \\ P_k \in C_k}} \frac{d\vec{P}_k \cdot d\vec{P}_p}{P_k P_p}$$

Coefficients d'inductance

Le terme écrit ci-dessus peut s'écrire sous la forme $\Phi_{p \rightarrow k} = \mathcal{M}_{pk} I_p$, où on a introduit le *coefficient d'inductance mutuelle* \mathcal{M}_{pk} des circuits C_p et C_k ; par construction, l'intégrale qui définit \mathcal{M}_{pk} est symétrique :

$$\mathcal{M}_{pk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\substack{P_p \in C_p \\ P_k \in C_k}} \frac{d\vec{P}_k \cdot d\vec{P}_p}{P_k P_p}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{M}_{pk} = \mathcal{M}_{kp} \quad (43.6)$$

Le coefficient d'inductance \mathcal{M}_{pp} porte le nom de *coefficient d'inductance propre* du circuit C_p , et on le note \mathcal{L}_p . On retiendra l'expression générale du flux du champ magnétique à travers le circuit C_k :

$$\Phi_k = \mathcal{L}_k I_k + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^N \mathcal{M}_{kp} I_p \quad (43.7)$$

Auto-induction

L'écriture de la force électromotrice induite à travers le circuit fermé C_k fait apparaître la loi électrocinétique :

$$U = 0 = e_k - R_k I_k$$

où $U = 0$ puisque le circuit est fermé. Dans le terme e_k , on distinguera la *force électromotrice autoinduite* :

$$e_k^{ai} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{L}_k I_k) = -\mathcal{L}_k \frac{dI_k}{dt}$$

ce qui permet encore d'écrire :

$$e_k^{ext} = R_k I_k + \mathcal{L}_k \frac{dI_k}{dt}$$

où la force électromotrice *externe* e_k^{ext} prend en compte :

- les variations des flux $\Phi_{p \rightarrow k}$ envoyés par les circuits C_p ($p \neq k$) à travers le circuit C_k ;
- l'éventuel flux coupé par le déplacement du circuit C_k .

43.2.2 Énergie magnétique

Expression de l'énergie magnétique

On peut déterminer de deux manières différentes l'énergie magnétique du système de circuits décrits ci-dessus. On peut d'abord définir cette énergie comme le travail réversible qui sera fourni par l'ensemble des générateurs électriques imposant le passage progressif d'un état initial sans courants ($I_k = 0, \Phi_k = 0$) à l'état final décrit ci-dessus ($I_k \neq 0, \Phi_k \neq 0$)³. Pour atteindre cet état au cours d'une transformation réversible, chaque circuit doit être connecté à un générateur qui compense exactement à chaque instant la force électromotrice induite ; par exemple, dans l'état $\lambda I_k, \lambda \Phi_k$ (avec $0 < \lambda < 1$), le circuit C_k doit être relié à un générateur qui impose la tension :

$$e_{G_k} = +\Phi_k \frac{d\lambda}{dt}$$

lors du passage du courant λI_k ; la puissance fournie s'intègre pour donner le travail électrique reçu par le circuit C_k :

$$W_k = \int_{\lambda=0}^1 \Phi_k \frac{d\lambda}{dt} \lambda I_k dt$$

soit bien sûr, en sommant sur tous les circuits en présence :

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \mathcal{M}_{kl} I_k I_l \quad (43.8)$$

Naturellement, on peut aussi se servir de la définition déjà donnée de l'énergie magnétique⁴ :

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} d\tau \quad (43.9)$$

qui fournit d'ailleurs une méthode de calcul des \mathcal{M}_{kl} .

Propriétés des coefficients d'inductance

Nous nous contenterons ici de remarquer que, pour toute répartition des courants I_k , l'énergie magnétique W_m doit être *strictement positive* (sauf si les courants sont tels que le champ magnétique s'annule en tout point de l'espace). Dans le cas où un seul circuit transporte un courant, on en déduit que :

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{L}_k I_k^2 > 0$$

ce qui impose bien sûr que $\mathcal{L}_k > 0$ pour tout circuit k . Remarquons par contre qu'il n'est pas possible de fixer le signe des coefficients mutuels \mathcal{M}_{kl} puisqu'ils dépendent de *deux* orientations arbitraires indépendantes.

Dans le cas de deux courants que nous supposons non nuls, on a de même :

$$W_m = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2 + \mathcal{M}_{12} I_1 I_2 \geq 0$$

ou encore, mettant en facteur I_1^2 et faisant apparaître un trinôme en $x = I_2/I_1$, on doit imposer à ce trinôme d'être toujours positif, d'où :

$$|\mathcal{M}_{12}| \leq \sqrt{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2}$$

³Cette transformation est ici envisagée sans déplacer les circuits, donc en présence seulement d'effets d'induction de Neumann.

⁴Un développement d'analyse vectorielle permet de montrer l'identité des deux expressions. Donnons-en seulement le principe : on identifie le terme \vec{B}^2 à $\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A}$ qu'on transforme en une somme de deux termes, l'un en $\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B})$, et l'autre en $\vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$ (ce qui revient à une intégration par parties). Le terme en divergence disparaît grâce au théorème d'Ostrogradski, tandis que l'autre se transforme, grâce au théorème d'Ampère, en intégrale de $\vec{A} \cdot \vec{j}$, et on retrouve dans cette intégrale une somme de termes exactement analogue à ceux qui définissent les \mathcal{M}_{kl} . Cette démonstration ne figure pas à notre programme, mais ne présente pas de difficulté particulière.

Loi de modération de Lenz

Considérons d'abord le cas d'un circuit qui ne subit *que* des effets d'auto-induction. Une augmentation du courant I_k dans ce circuit se traduit par une force électromotrice auto-induite négative (puisque $L_k > 0$), c'est-à-dire qui tend à diminuer le courant I_k .

Cette propriété prend le nom de *loi de Lenz* sous la forme générale suivante : les effets d'induction tendent à limiter les variations du courant électrique imposées par l'opérateur aux circuits étudiés.

43.3 Applications

43.3.1 Courants de Foucault

Courants induits en volume

Considérons un milieu conducteur parcouru par un courant électrique variable $I(t)$; ce courant est lui-même le siège d'un champ magnétique propre variable $\vec{B}_p(t)$, donc d'effets d'induction.

Le champ propre peut être superposé au champ extérieur $\vec{B}_e(t)$, lui-même éventuellement variable.

L'ensemble des effets d'induction imposés par cette variation temporelle du champ extérieur peut être décrit au moyen d'un champ électromoteur de Neumann ; il apparaît donc, dans ce milieu conducteur, des courants induits en volume ou *courants de Foucault*, donnés par :

$$\vec{j} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

dont on remarquera simplement qu'ils augmentent à haute fréquence.

Cette situation peut être mise en jeu de différentes façons :

- Le champ magnétique est créé de façon prépondérante de l'extérieur du milieu conducteur étudié, dans le but de faire apparaître ces courants induits en volume : il s'agit des systèmes de *chauffage par induction* ou d'*alimentation électrique* (de batteries, etc.) par induction.

Ces systèmes présentent l'avantage d'un transfert d'énergie sans contact.

- Le champ magnétique peut être exclusivement constitué du champ propre (créé par un fil à l'intérieur de son propre volume) ou du champ créé dans le circuit électrique utilisé dans les pièces métalliques non conductrices de ce circuit (bâti d'une machine, noyau de fer doux d'un électro-aimant, etc.). Ces courants induits en volume se traduisent alors par une *augmentation des pertes d'énergie par effet Joule* en haute fréquence.

Pour éviter cet effet indésirable, on peut utiliser des matériaux métalliques feuilletés, c'est-à-dire découpés par des feuilles isolantes perpendiculaires aux lignes de courant prévisibles des courants de Foucault.

- Enfin, les courants induits en volume créent à leur tour un champ magnétique (champ propre) qui, vu la loi de Lenz, s'oppose aux variations du champ magnétique imposé. Ainsi, le champ propre diminuera à chaque fois que le champ extérieur augmentera ; ainsi l'effet observé sera une atténuation du champ imposé. On va voir que cette situation s'identifie avec l'étude de l'effet de peau ou effet Kelvin.

Effet de peau

On peut souvent traiter l'ensemble des phénomènes d'induction par le calcul du champ magnétique extérieur (dans le cadre de l'AEQS), suivi de la détermination du champ électromoteur ou de la force électromotrice, qui permet enfin de déterminer les courants induits.

Une telle situation simple n'est cependant pas toujours possible, en particulier si le champ du aux courants induits n'est pas négligeable : il faut tenir compte de l'auto-induction.

Toutefois, il existe des cas où le coefficient d'auto-induction \mathcal{L} n'est pas connu ; c'est le cas de tous les conducteurs parcourus par un courant de haute fréquence. La seule solution est alors la détermination *couplée* des champs *et* des courants, par la résolution des équations de Maxwell qui, dans un milieu conducteur et dans le cadre de l'AEQS, prennent la forme :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \underbrace{\vec{j} = \gamma \vec{E}}_{\text{Loi d'Ohm}} \quad \underbrace{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{\text{Loi de Faraday}} \quad \underbrace{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}_{\text{Loi d'Ampère}}$$

ce qui mène, en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω , à l'équation de diffusion de Kelvin :

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma i \omega \vec{j} \quad \Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma i \omega \vec{B}$$

qui traduit l'atténuation du champ magnétique et du courant en profondeur dans le milieu conducteur, avec l'épaisseur caractéristique (épaisseur de peau) :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (43.10)$$

43.3.2 Électromécanique

Bilans énergétiques

Considérons un circuit fermé en mouvement, parcouru par un courant électrique I créé, au moins pour partie, par des effets d'induction de Lorentz associés à la force électromotrice $e_L = -\frac{\delta\Phi_c}{\delta t}$ mais qui subit aussi, du fait de la présence simultanée d'un circuit mobile et d'un champ magnétique, des forces de Laplace qui fournissent le travail mécanique $\delta W_m = I\delta\Phi_c$. Le travail électrique reçu pendant la durée δt par le circuit de la part des forces électromotrices de Lorentz s'écrit $\delta W_e = e_L I = -\delta W_m$, ce qui permet de proposer un bilan énergétique général des systèmes électromécaniques.



SYSTÈMES ÉLECTROMÉCANIQUES

Un système électromécanique est décrit par une équation électrique, faisant intervenir la force électromotrice induite par le mouvement du circuit $e_L = -\frac{\delta\Phi_c}{\delta t}$, et par une ou plusieurs équations mécaniques, faisant intervenir le travail des forces de Laplace influant sur le mouvement du circuit, $\delta W_m = I\delta\Phi_c$.

La somme des travaux algébriquement reçus par le circuit de la part des forces mécaniques de Laplace et de la part des générateurs induits de Lorentz est nulle, $\delta W_m + \delta W_e = 0$.

Selon le signe des termes δW_e et δW_m , un système électromécanique peut être un générateur électrique (dynamo, alternateur) ou un moteur à alimentation électrique (moteurs à courant continu ou alternatif).

Générateurs

Les générateurs de courant électrique vérifient $\delta W_m > 0 \Rightarrow P_G = I \frac{\delta\Phi_c}{\delta t} > 0$, où P_G est la puissance fournie par le générateur au reste du circuit.

La description de principe d'un générateur de courant alternatif (alternateur) est donc un système mécanique qui impose la rotation à vitesse angulaire constante d'une bobine devant un aimant fixe ; le flux coupé varie alors de manière sinusoïdale, de même que le courant produit.

Le dispositif mécanique qui impose la rotation de la bobine mobile, appelée en général *rotor*, doit en permanence vaincre les effets de *freinage* des forces de Laplace, donc fournir au moins la puissance P_G au système.

Le rendement de conversion électromécanique d'un tel système est toujours inférieur à l'unité ; en effet, le dispositif mécanique doit aussi vaincre les frottements mécaniques, et une partie de la puissance P_G est dissipée en effet Joule à l'intérieur de l'alternateur lui-même.

Moteurs

Les moteurs électriques vérifient $\delta W_e > 0 \Rightarrow P_m = -I \frac{\delta\Phi_c}{\delta t} > 0$, où P_m est la puissance mécanique fournie par le moteur au reste du système mécanique auquel il est couplé.

On peut décrire le schéma de principe d'un moteur en courant alternatif (moteur asynchrone de Tesla) en citant une alimentation électrique qui impose un champ magnétique tournant à vitesse angulaire constante en présence d'une bobine mobile. La bobine qui crée le champ magnétique tournant est le *stator*, et la bobine mobile, reliée par l'arbre moteur au dispositif mécanique entraîné en rotation, est le *rotor*.

Le flux coupé dans le rotor varie alors de manière sinusoïdale, à une fréquence qui dépend de la différence des vitesses angulaires de rotation du rotor et du champ magnétique imposé par le stator. Les forces de Laplace sont également variables de façon sinusoïdale mais on peut montrer que, dans les conditions normales de fonctionnement, elles sont motrices en moyenne.

Le dispositif électrique qui alimente le stator doit vaincre les effets de *modération* de la force électromotrice induite. Il doit donc fournir au moins la puissance P_m au système.

Notons encore une fois que le rendement de conversion électromécanique d'un tel système est toujours inférieur à l'unité ; en effet, le dispositif électrique dissipe aussi de la puissance par effet Joule dans les deux bobines (rotor et stator), et la puissance mécanique développée doit encore vaincre les frottements mécaniques.

43.3.3 Exemple de convertisseur électromécanique

On réalise un convertisseur (ou transducteur) électromécanique fonctionnant en courant continu en associant (cf. fig. 43.1) une route métallique de rayon a pouvant tourner autour de son axe Oz et des frotteurs disposés en son centre C et à sa périphérie P pour assurer le passage d'un courant électrique i .

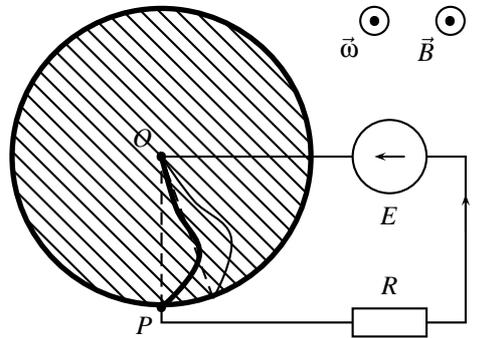


FIG. 43.1 – Transducteur en continu (roue de Barlow)

L'ensemble est alimenté par un générateur de force électromotrice E et de résistance R ; le couplage électromécanique est assuré par le champ magnétique statique $\vec{B} = B\vec{e}_z$, orthogonal à la roue.

Celle-ci tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$; son inertie est caractérisée par le moment d'inertie J autour de l'axe de rotation, et les actions mécaniques (autres que les forces de Laplace) ont pour moment relativement à cet axe $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_z$.

Remarquons d'abord que, quelle que soit sa forme, une ligne de courant OP balaye, au cours de la durée δt , une surface égale à l'aire du triangle $\delta S = \frac{1}{2}a^2|\omega|\delta t$; le flux coupé s'écrit donc, compte tenu des orientations :

$$\delta\Phi_c = -\frac{Ba^2\omega}{2}\delta t$$

On en déduit l'équation électrique, en fonction du coefficient d'auto-induction L :

$$E - \frac{\delta\Phi_c}{\delta t} = E + \frac{Ba^2\omega}{2} = Ri + L\frac{di}{dt}$$

où on remarque l'expression de la force électromotrice induite totale, due aux phénomènes de Lorentz et de Neuman :

$$e = -\frac{\delta\Phi_c}{\delta t} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\delta\Phi_c}{\delta t} - L\frac{di}{dt}$$

D'autre part, le moment des forces de Laplace est donné par sa puissance :

$$\Gamma_L\omega = i\frac{\delta\Phi_c}{\delta t} \Rightarrow \Gamma_L = -\frac{Ba^2i}{2}$$

d'où l'équation mécanique (théorème du moment cinétique) :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \frac{Ba^2i}{2}$$

On peut enfin proposer un bilan instantané des puissances en notant :

$$Ei = -\frac{Ba^2i\omega}{2} + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 \right) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}J\omega^2 \right) = \Gamma\omega - \frac{Ba^2\omega i}{2}$$

qu'on combine sous la forme :

$$\Gamma\omega + Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \right)$$

qu'on interprète bien en affirmant que la somme des puissances fournies par le générateur électrique $P_G = Ei$ et par le dispositif mécanique $P_m = \Gamma\omega$ est égale à la somme de la puissance dissipée par effet Joule $P_J = Ri^2$ et de la dérivée des énergies cinétique et magnétique emmagasinées par le système.